On the derivative of two functions from Denjoy-Tichy-Uitz family.

Dmitry Gayfulin.

1. Introduction

The family of functions, we investigate in this article, was originally introduced by A.Denjoy [4] and later rediscovered by R Tichy and J. Uitz[5]. We denote the functions of the family by $g_\lambda(x)$, where $\lambda \in (0,1)$. The definition will be given in the following section. The most famous function of the family is the Minkiowski question-mark function. As we would see, it corresponds to $\lambda = \frac{1}{2}$. All functions of the family are continuous, strictly increasing and map the segment $[0,1]$ onto itself. Moreover, they are singular i.e. $\forall\lambda$ the derivative $g'_\lambda(x)$, if exists, can take only two values: 0 and $+\infty$. In this paper we consider two functions of the class which correspond to λ equals $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ or $1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. The aim of this paper is to prove some theorems about essential conditions on x such that if the condition holds then the derivative $g'_\lambda(x)$ exists and has determined value. The constants used in our theorems are non-improvable.

Our paper is wirtten in Russian. However Inrtoduction and the formulation of main results (Sections 2,3 below) are written in English.

2. Definitions, notation and preliminaries

The function $g_\lambda(x)$ where $\lambda \in (0,1)$ is defined as follows:

$$\forall\lambda\ g_\lambda\left(\frac{0}{1}\right) = 0,\ g_\lambda\left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Then if $g_\lambda(x)$ is defined for two consecutive Farey fractions $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ we put

$$g_\lambda\left(\frac{p+q}{r+s}\right) = (1-\lambda)g_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) + \lambda g_\lambda\left(\frac{r}{s}\right).$$

For irrational $x \in [0,1]$ the function $g_\lambda(x)$ is defined by continious arguments.

Let x be represented as a regular continued fraction $x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_t, \ldots]$. One can easily deduce the following identity

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) = \lambda^{a_1-1} - \lambda^{a_1-1}(1-\lambda)^{a_2} + \lambda^{a_1+a_3-1}(1-\lambda)^{a_2} - \ldots \\ +\lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t-2}} - \\ -\lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}} + \ldots \end{aligned} \quad (1)$$

This cam be proved by induction on length of the continued fraction. Particulary, for $\lambda = \varphi^{-1}$ where $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ is a positive root of the equation $x^2 = x+1$ we

have

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \frac{1}{\varphi^{a_1-1}} - \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2-1}} + \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2+a_3-1}} - \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2+a_3+2a_4-1}} \dots$$

and for $\tau = 1 - \frac{1}{\varphi}$

$$g_{\tau}(x) = \frac{1}{\varphi^{2a_1-2}} - \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2-2}} + \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2+2a_3-2}} - \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2+2a_3+a_4-2}} \dots$$

Denote by $S_t^{\varphi}(x)$ and $S_t^{\tau}(x)$ the series

$$\begin{aligned} S_t^{\varphi}(x) &= a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^i), \\ S_t^{\tau}(x) &= 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

where a_i are partial quotients of continued fraction representation of x.

3. Main results

Theorem 1.
We put $\varkappa_1 = 4$.
(***i***)*1. Let for real irrational* $x = [0; a_1, ..., a_t, ...]$ *the following inequality be valid:*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{sup}(x) < \varkappa_1.$$

Then the derivative $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *exists and* $g'_{\varphi^{-1}}(x) = +\infty$
(***ii***) *For any positive* δ *there exists an irrational*
$y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *such that:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} < \varkappa_1 + \delta \text{ and } g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0.$$

Theorem 2.
There exists an effectively computable constant $\varkappa_2 = 13,06+$ *such that, if for some real irrational* $x = [0; a_1, ..., a_t, ...]$ *the following inequality is valid:*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2$$

Then the derivative $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *exists and equals* 0.
(***ii***) *For any positive* δ *there exists an irrational*
$y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *such that:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} > \varkappa_2 - \delta \text{ and } g'_{\varphi^{-1}}(y) = +\infty.$$

The second statements of the Theorems 1 and 2 show that the constants $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ are non-improvable.

Theorem 3.
(***i***) *If all partial quotients of* $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *are bounded by 2, then the derivative* $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *exists and equals* $+\infty$
(***ii***) *There exists a quadratic irrationality* $y \in [0,1]$ *such that all* l *partial quotients of* y *are bounded by* 3 *and* $g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$.

Theorem 4.
Theorems 1, 2 and 3 hold for the derivative of the function $g_\tau(x)$ *with the same constants* $\varkappa_1, \varkappa_2$ *and* $S_t^\varphi(x)$ *substituted by* $S_t^\tau(x)$ *in all statements.*

Производные двух функций семейства Денжуа-Тихого-Уитца.

Гайфулин Д. Р.

Аннотация

Семейство сингулярных функций $g_\lambda(x)$, где $\lambda \in (0,1)$ было впервые рассмотрено Денжуа в 1938 году и переоткрыто Тихим и Уитцем в 1995 году. Самым известным представителем данного класса является функция Минковского $?(x)$, соответствующая значению $\lambda = \frac{1}{2}$. Для сингулярных функций большой интерес представляет вопрос поиска условий на число x, при которых можно заведомо сказать, что $g'_\lambda(x) = 0$ или же $g'_\lambda(x) = \infty$. Для функции Минковского данная задача была впервые рассмотрена в 2001 году Д.Парадизом, П.Виадером и Л.Бибилони и была в основном решена в 2008 году в работе Н.Г.Мощевитина, А.А.Душистовой и И.Д.Кана. В настоящей работе впервые исследуются производные функций $g_\lambda(x)$ для значений параметра λ, равных $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Констатнты, полученные в работе, являются неулучшаемыми.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: цепная дробь, континуант, функция Минковского.

1 Введение

Функция Минковского $?(x)$ была впервые рассмотрена Германом Минковским в 1904 году [1]. Она непрерывно, монотонно и взаимно однозначно отображает отрезок $[0,1]$ на себя и определяется на множестве рациональных чисел следующим индуктивным образом: $?(\frac{0}{1}) = 0, ?(\frac{1}{1}) = 1$. Далее, если для несократимых дробей $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ определены значения $?(\frac{p}{q})$ и $?(\frac{r}{s})$, но $?(x)$ еще не определено ни в одной точке интервала $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$, то полагают $?(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}) = \frac{?(\frac{p}{q})+?(\frac{r}{s})}{2}$, где операция $\oplus$ означает взятие медианты двух дробей: $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$. Для иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ функция определяется по непрерывности.

Пусть

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \tag{3}$$

- разложение в обыкновенную цепную дробь числа x, в этом случае a_i называются неполными частными данной цепной дроби. Будем вместо

$[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ использовать более краткое обозначение $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Верна следующая формула, выражающая значение функции Минковского в точке x через неполные частные разложения числа x в цепную дробь [2]:

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}} + \ldots \qquad (4)$$

Известно также, что функция Минковского является предельной функцией распределения для значения обыкновенных конечных цепных дробей [3].

В работах [4] и [5] рассмотрен более общий класс функций, называемых функциями Денжуа-Тихого-Уитца $g_\lambda(x)$, где $\lambda \in (0,1)$. Они имеют такую же область определения и те же значения на концах отрезка $[0,1]$: $g_\lambda(0) = ?(0) = 0$, $g_\lambda(1) = ?(1) = 1$, но значение в медианте определяется по более общему правилу:

$$g_\lambda(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}) = (1-\lambda)g_\lambda(\frac{p}{q}) + \lambda g_\lambda(\frac{r}{s}).$$

Для $g_\lambda(x)$ в работе [6] доказана аналогичная формула выражения через неполные частные числа $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$:

$$g_\lambda(x) = \lambda^{a_1-1} - \lambda^{a_1-1}(1-\lambda)^{a_2} + \lambda^{a_1+a_3-1}(1-\lambda)^{a_2} - \ldots +$$
$$+\lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t-2}} - \lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}} + \ldots \qquad (5)$$

Очевидно,что $g_{\frac{1}{2}}(x) = ?(x)$. В работе [5] также показано, что все функции данного класса монотонны, непрерывны и сингулярны (то есть их производные могут принимать только значения 0 или $+\infty$).

Обозначим $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989\ldots$ - положительный корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Эта величина традиционно называется "золотым сечением". В работе Е.Н. Жабицкой [6] было показано, что функция $g_\lambda(x)$ при $\lambda = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\varphi^2} \approx 0.381966011$ является предельной функцией распределения для так называемых приведенных регулярных цепных дробей, т.е. дробей вида

$$x = 1 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ldots - \cfrac{1}{b_l}}}, \quad b_i \geqslant 2, \qquad (6)$$

Обозначим $\tau = \frac{1}{\varphi^2}$. Поскольку $1 - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}$, для $g_\tau(x)$ ввиду (5) верна следующая формула:

$$g_\tau(x) = \frac{1}{\varphi^{2a_1-2}} - \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2-2}} + \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2+2a_3-2}} - \ldots \qquad (7)$$

Обозначим

$$S_t^{\tau}(x) = 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i-1}).$$

Тогда формула (7) для иррационального x примет вид:

$$g_{\tau}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^{\tau}(x)-2}} \tag{8}$$

Введем также сумму

$$S_t^{\varphi}(x) = a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i}).$$

Поскольку φ удовлетворяет соотношению $\varphi^2 = 1 - \varphi$, формула (5) принимает для значения параметра $\lambda = \frac{1}{\varphi}$ следующий вид:

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \frac{1}{\varphi^{a_1-1}} - \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2-1}} + \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2+a_3-1}} - \ldots \tag{9}$$

Или с учетом введеных обозначений:

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^{\varphi}(x)-1}}. \tag{10}$$

2 История вопроса

Впервые задача поиска условия на неполные частные x, при которых $?'(x)$ равно нулю или $+\infty$ была поставлена в работе [7] (2001). В ней было выяснено, что ключевым критерием является предельное значение среднего арифметического неполных частных

$$S(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_t}{t}.$$

Были найдены константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что при

$$S(x) < \varkappa_1 \ ?'(x) = +\infty, \text{ а при } S(x) > \varkappa_2 \ ?'(x) = 0, \tag{11}$$

если соответствующие производные существуют. В 2007 году в работе [8] были найдены неулучшаемые значения констант $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ и доказано, что производная всегда существует при выполнении неравенств (11). В статье [3] были также посчитаны неулучшаемые асимптотики функции $S(x)$, уточняющие критерий (11).

Данная статья является первой работой, в которой исследуются производные функций семейства Денжуа-Тихого-Уитца $g_{\lambda}(x)$ при $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

3 Благодарности

Автор благодарит Н.Г. Мощевитина за постановку задачи и И.Д. Кана за полезные консультации при решении данной задачи и, в особенности, за многочисленные замечания по тексту в ходе написания настоящей статьи.

4 Формулировка основных результатов

Теорема 1.
Положим $\varkappa_1 = 4$.
(***i***) *Пусть* $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *- иррациональное число и*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{sup}(x) < \varkappa_1.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *существует и равна* $+\infty$.
(***ii***) *Для любого положительного* δ *существует иррациональное* $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *такое, что:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} < \varkappa_1 + \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0.$$

Теорема 2.
Существует алгоритмически вычислимая с любой точностью константа $\varkappa_2 \approx 13.05\ldots$ *такая, что выполнены следующие утверждения:*
(***i***) *Пусть* $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *- иррациональное число и*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2 \approx 13.05.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *существвет и равна* 0.
(***ii***) *Для любого положительного* δ *существует иррациональное* $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *такое, что:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} > \varkappa_2 - \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = +\infty.$$

Вторые утверждения в теоремах 1 и 2 показывают, что константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ являются неулучшаемыми.

Теорема 3.
(***i***) *Если все неполные частные числа* $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *меньше либо равны 2, то* $g'_{\varphi^{-1}}(x) = +\infty$
(***ii***) *Существует* $y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *такое, что все неполные частные числа* y *меньше либо равны* 3 *и* $g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$.

Теорема 4. *Для производной функции $g_\tau(x)$ теоремы 1, 2 и 3 верны с теми же самыми константами $\varkappa_1, \varkappa_2$, при этом $S_t^\varphi(x)$ заменяется во всех формулировках на $S_t^\tau(x)$.*

5 Континуанты и цепные дроби. Леммы о производных

Будем обозначать большими буквами A, B последовательности натуральных чисел произвольной длины: $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, определим для них аналогично $S_n^\tau(A) = S_n^\tau([A]), S_m^\varphi(B) = S_m^\varphi([B])$.

Через $\langle A \rangle$ обозначается *континуант* - функция от произвольного (возможно пустого) конечного набора натуральных чисел, определенная по следующему правилу:
$\langle\ \rangle = 1$,
$\langle a_1 \rangle = a_1$.
Далее, для $n \geqslant 2$ значение континуанта выражается рекуррентно:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \rangle = a_n \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \rangle + \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle. \tag{12}$$

Числа a_i называются *неполными частными* континуанта или соответствующей ему цепной дроби $[A]$. При этом там, где не это будет вызывать путаницы, мы будем понимать под континуантом как саму последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, так и значение континуанта от нее. Через $\overrightarrow{A}$ обозначим последовательность неполных частных в исходном порядке, то есть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а через $\overleftarrow{A}$ - в обратном порядке т.е. $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$. Обозначим также $A_- = (a_2, a_3, \ldots, a_n)$ и
$A^- {=} (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, тогда выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{A}] &= [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{\langle A_- \rangle}{\langle A \rangle} \\ [\overleftarrow{A}] &= [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{\langle A^- \rangle}{\langle A \rangle} \end{aligned} \tag{13}$$

Известно следующее свойство (см, например, [9]):

$$\langle X, Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y_- \rangle + \langle X^- \rangle \langle Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle (1 + [\overleftarrow{X}][\overrightarrow{Y}]). \tag{14}$$

Будем обозначать через $p_i(x)$ и $q_i(x)$ соответственно числители и знаменатели $i-$х подходящих дробей к $x \in [0,1]$, то есть $\frac{p_i(x)}{q_i(x)} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i]$. В тех случаях, когда это не вызовет путаницы, мы будем опускать аргумент x и писать просто $\frac{p_i}{q_i}$.

Несложно показать, что производная $g'_{\varphi^{-1}}(x) = g'_\tau(x) = 0$ при $x \in \mathbb{Q}$. В дальнейшем в данной работе мы будем исследовать $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ и $g'_\tau(x)$ только для иррациональных x.

Далее в этой части будут доказаны леммы об оценках сверху и снизу на величины

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta}$$

через $S_t^\varphi(x), S_t^\tau(x)$ и знаменатели подходящих дробей к иррациональному числу x. Все леммы данного раздела будут доказаны только для случая $\delta > 0$, поскольку случай $\delta < 0$ аналогичен.

Прежде всего отметим следующее важное свойство.

Лемма 5.1. *[10, с. 23]. Если x - число, заключенное между двумя подходящими дробями $\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}}$ и $\frac{p_l}{q_l}$, то $l+1$-е неполное частное x - это максимальное m такое, что*

$$\frac{p_{l+1}}{q_{l+1}} = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{m}$$

лежит по ту же самую сторону от x, что и $\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}}$.

В условиях предыдущей леммы если $i < m$, то дробь

$$\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{i}$$

называется *промежуточной дробью* числа x.

Лемма 5.2. *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число, тогда для любого достаточно малого по абсолютной величине δ существует $t = t(x,\delta)$ такое, что*

$$\begin{gathered}\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^\varphi(x)+7}}, \\ \frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^\tau(x)+9}}.\end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы для обеих функций параллельно.

Пусть ξ— промежуточная или подходящая дробь к числу x с минимальным знаменателем, попавшая в интервал $(x, x+\delta)$. По лемме 5.1 она имеет вид:

$$\xi = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{k+1}, \quad k \geqslant 0.$$

С другой стороны, ξ представима в виде $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1$, где среди дробей ξ_0 и ξ_1 одна подходящая к числу x, а вторая подходящая или промежуточная. Обозначим за ξ_0 меньшую из дробей, а за ξ_1 - большую. Поскольку знаменатели ξ_0 и ξ_1 меньше знаменателя ξ, то выполнены неравенства:

$$\xi_0 < x < \xi < x + \delta < \xi_1.$$

Нетудно видеть, что ξ_0 - подходящая дробь к x. Действительно, если ξ_0 – промежуточная дробь, то по лемме 5.1 медианта $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1$ должна лежать по ту же сторону от x, что и ξ_0, противоречие. Отметим также, что если $k = 0$, то обе дроби ξ_0 и ξ_1 являются подходящими к x. В этом случае подходящая дробь ξ_1 имеет меньший порядок, поскольку медианта ξ_0 и ξ_1 лежит по ту же сторону от x, что и ξ_1. Таким образом,

$$\xi_0 = \frac{p_l}{q_l}, \quad \xi_1 = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{k}.$$

Поскольку $\xi_0 < x < \xi_1$, подходящая дробь ξ_0 имеет четный порядок, т.е. $\xi_0 = [a_1, \ldots, a_{2t}]$. Рассмотрим 2 случая:
1) $k > 0$.
2) $k = 0$.
Разберем случай 1). Имеем:

$$\xi_1 = [a_1, \ldots, a_{2t}, k], \;\; \xi = [a_1, \ldots, a_{2t}, k+1], \; k + 1 \leqslant a_{2t+1}. \tag{16}$$

Пусть теперь z - такое минимальное натуральное число, что выполнено хотя бы одно из условий:

$$\xi_- = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} > x \text{ или } \xi_+ = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} < x + \delta.$$

Введем также дроби

$$\xi_{--} = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} < x \text{ и } \xi_{++} = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} > x + \delta.$$

Таким образом,

$$\xi_0 \leqslant \xi_{--} < x < \xi < x + \delta < \xi_{++} \leqslant \xi_1. \tag{17}$$

Из монотонности функций $g_{\varphi^{-1}}(x)$ и $g_\tau(x)$ следует, что

$$g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \geqslant \min\left[g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-),\ g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)\right], \tag{18}$$

аналогичное утверждение верно для функции $g_\tau(x)$. Посмотрим, как разлагаются ξ_- и ξ_+ в цепные дроби:

$$\begin{gathered}
\xi_- = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} = \\
= \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1, z\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z\rangle} = [a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z]; \\
\xi_+ = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} = \\
= \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k, 1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1\rangle} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k, 1, z\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z\rangle} = [a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z].
\end{gathered} \tag{19}$$

Аналогично, при $z > 1$:

$$\xi_{--} = [0; a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z-1],\ \ \xi_{++} = [0; a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z-1]. \tag{20}$$

При $z = 1$ легко видеть, что $\xi_{--} = \xi_0,\ \xi_{++} = \xi_1$. Обозначим $S_t^\varphi(x) - 1 = n_\varphi$, $S_t^\tau(x) - 1 = n_\tau$. Посчитаем теперь разности

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-), g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) \text{ и } g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-), g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi).$$

Цепные дроби ξ и ξ_- отличаются только последним неполным частным, поэтому, ввиду (8), (10):

$$\begin{aligned}
g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + k + 1 + 2z}}, \\
g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + 2k + 2 + z}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку $\xi = [a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1]$, то, аналогично,

$$\begin{aligned}
g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + k + 2 + z}}, \\
g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + 2k + 2z + 1}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Из (21) и (22) несложно видеть, что

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) \leqslant g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi), \\ g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) \geqslant g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi), \end{aligned} \tag{23}$$

а, следовательно, ввиду (18)

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+1+2z}}, \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) \geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+2k+2z+1}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Оценим теперь δ. Рассмотрим два подслучая:
1.1) ξ -подходящая дробь,
1.2) $\xi-$ промежуточная дробь.
Случай 1.1 разбивается на 2 подслучая:
1.1.1) $z = 1$
1.1.2) $z \geq 2$

1.1.1) Имеем ввиду леммы 5.1 $k+1 = a_{2t+1}$,

$$\delta \leqslant \xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}\rangle \langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle} \leqslant \frac{2}{q_{2t} q_{2t+1}}. \tag{25}$$

Таким образом, применяя оценки (25) и (24) и учитывая, что $\varphi^2 > 2$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{n_\varphi+k+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2}}, \\ \frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{n_\tau+2k+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+1}}. \end{aligned} \tag{26}$$

1.1.2) Аналогично, $k+1 = a_{2t+1}$. Поскольку $\xi_{--} < x$, то по лемме 5.1 $z - 1 \leqslant a_{2t+2}$. В этом случае получаем, используя (16) и (20):

$$\begin{aligned} &\delta \leq \xi_{++} - \xi_{--} = (\xi_{++} - \xi) + (\xi - \xi_{--}) = \\ &= \frac{1}{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k, 1, z-1\rangle \langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1\rangle} + \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle \langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z-1\rangle} = \\ &= \frac{1}{q_{2t+1}} \left(\frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z-1\rangle} + \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z-1\rangle}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{q_{2t+1}(z-1)\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} = \frac{2}{q_{2t+1}^2 (z-1)}. \end{aligned} \tag{27}$$

То есть,

$$\delta \leq \frac{2}{q_{2t+1}^2(z-1)}. \tag{28}$$

Пользуясь тем, что функция $\frac{x}{\varphi^{2x}}$ убывает на множестве натуральных чисел, из (24), (28) получаем оценку:

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2(z-1)}{\varphi^{n_\varphi+k+2(z-1)+5}} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2(a_{2t+2}+1)}{\varphi^{n_\varphi+k+2(a_{2t+2}+1)+5}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2a_{2t+2}+6}} \tag{29}$$

Для функции $g_\tau(x)$ разберем 2 подслучая:
(i) $z-1 \leqslant \frac{a_{2t+2}}{2}$. В этом случае, применяя оценки (24) и (28), заключаем:

$$\frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2(z-1)}{\varphi^{n_\tau+2k+2(z-1)+5}} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2 a_{2t+2}}{2\varphi^{n_\tau+2k+a_{2t+2}+5}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+7}}. \tag{30}$$

Во втором неравенстве мы снова воспользовались монотонностью функции $\frac{x}{\varphi^{2x}}$.
(ii) $z-1 > \frac{a_{2t+2}}{2}$.
Напомним, что $\xi = \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}$. Следовательно, по лемме 5.1 $x < \frac{p_{2t+2}}{q_{2t+2}} \oplus \xi < \xi$. Отсюда по монотонности функции $g_\tau(x)$ имеем ввиду (8):

$$g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x) \geqslant g_\tau(\xi)-g_\tau(\xi \oplus \frac{p_{2t+2}}{q_{2t+2}}) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+1}}. \tag{31}$$

Теперь, применяя (28) и заменяя $z-1$ на $\frac{a_{2t+2}}{2}$, окончательно оцениваем:

$$\frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2(z-1)}{\varphi^{n_\tau+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+1}} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2 a_{2t+2}}{2\varphi^{n_\tau+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+1}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+5}}. \tag{32}$$

1.2) Поскольку ξ - промежуточная дробь, то $z=1$ и

$$\delta \leq \frac{1}{\langle a_1,\ldots,a_{2t}\rangle\langle a_1,\ldots,a_{2t},k\rangle} \leqslant \frac{1}{kq_{2t}^2}.$$

Поскольку $k < a_{2t+1}+1$, имеем аналогично предыдущим случаям следующие оценки:

$$\begin{aligned}\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{kq_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi+k+3}} \geqslant \frac{(a_{2t+1}+1)q_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi+a_{2t+1}+4}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+4}},\\ \frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta} &\geqslant \frac{kq_{2t}^2}{\varphi^{n_\tau+2k+3}} \geqslant \frac{(a_{2t+1}+1)q_{2t}^2}{\varphi^{n_\tau+2a_{2t+1}+3}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+4}}.\end{aligned} \tag{33}$$

Теперь разберем 2), в этом случае соответствующие цепные дроби имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= [a_1, \ldots, a_{2t-1}], \\ \xi &= [a_1, \ldots, a_{2t} + 1], \\ \xi_- &= [a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z]. \end{aligned} \tag{34}$$

Аналогично первому случаю оценим:

$$\begin{gathered} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \geqslant \min\left(g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-), g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)\right), \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) \geqslant \min\left(g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-), g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi)\right), \\ g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+1+2z}}, \quad g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau+z+1}}, \\ g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+1+z}}, \quad g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau+1+2z}}. \end{gathered} \tag{35}$$

А значит:

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+1+2z}}, \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\tau+1+2z}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Поскольку оценки на величины $g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)$ и $g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)$ совпадают, то достаточно доказать утверждение только для функции $g_{\varphi^{-1}}(x)$

Оценим δ. Так же, как и в случае 1), рассмотрим два подслучая:
2.1) ξ -подходящая дробь;
2.2) $\xi-$ промежуточная дробь.
Случай 2.1) дополнительно разбивается на два подслучая:
2.1.1) $z = 1$;
2.1.2) $z \geqslant 2$.
Разберем все случаи.
2.1.1) Получаем $a_{2t+1} = 1, \delta \leqslant \xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{q_{2t-1}q_{2t}}$, следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{n_\varphi+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+2}} \tag{37}$$

2.1.2) Аналогично, $a_{2t+1} = 1$, и ввиду леммы 5.1 $z - 1 \leqslant a_{2t+2}$. Кроме того, соответствующие цепные дроби в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_{--} &= [a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z-1], \\ \xi_+ &= [a_1, \ldots, a_{2t} + 1, z], \\ \xi_{++} &= [a_1, \ldots, a_{2t} + 1, z-1]. \end{aligned} \tag{38}$$

Следовательно δ можно оценить следующим образом:

$$\delta \leq \xi_{++} - \xi_{--} = (\xi_{++} - \xi) + (\xi - \xi_{--}) =$$
$$= \frac{1}{\langle a_2, \ldots, a_{2t}+1, z-1\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}+1\rangle} + \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}+1\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z-1\rangle} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{q_{2t+1}(z-1)q_{2t+1}} = \frac{2}{(z-1)q_{2t+1}^2}. \quad (39)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{(z-1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+5+2(z-1)}} \geqslant \frac{(a_{2t+2}+1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+5+2(a_{2t+2}+1)}} \geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2a_{2t+2}+7}}. \quad (40)$$

2.2) Аналогично случаю 1.2) из леммы 5.1 получчаем, что $z = 1$, тогда $\delta \leqslant \xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{q_{2t-1}q_{2t}}$, следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{n_\varphi+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+2}}. \quad (41)$$

Объединяя все рассмотренные случаи, из формул (26), (29), (30), (32), (33), (37), (40) и (41) получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число, тогда для любого достаточно малого по абсолютной величине δ существует $t = t(x, \delta)$ такое, что*

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^\varphi(x)-5}},$$
$$\frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^\tau(x)-5}}. \quad (42)$$

Доказательство. Мы проведем доказательство только для функции $g_{\varphi^{-1}}(x)$, и при $\delta > 0$, поскольку случаи, когда рассматриваемая функция - $g_\tau(x)$ или δ - отрицательно, совершенно аналогичны.
Таким же образом, как и в лемме 5.2 определим числа $\xi, \xi_0, \xi_1, \xi_{++}, \xi_{--}, \xi_+, \xi_-, n_\varphi$.
Ввиду (17) и монотонности функции $g_\varphi(x)$, выполнено неравенство

$$g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \leqslant g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) \quad (43)$$

Рассмотрим 2 случая:
1) $z = 1$. В этом случае $\xi_{--} = \xi_0, \xi_{++} = \xi_1$. Следовательно, подставляя (16) в (10), получаем:

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k}}. \quad (44)$$

2) $z \geqslant 2$. В этом случае из (16), (20) и формулы (10) имеем

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) = (g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)) + (g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--})) = \\ = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+2z-1}} + \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+1+z}} \leqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+z-1}}. \quad (45)$$

Объединяя случаи, получаем

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) \leqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+z-1}}. \quad (46)$$

Оценим теперь δ. Рассмотрим два случая:
1) $\xi_- > x$
2) $\xi_- < x, \xi_+ < x+\delta$
1)Ввиду (17) $\delta > \xi - \xi_-$. Рассмотрим еще 2 подслучая:
1.1) $z = 1$.
1.2) $z \geqslant 2$.
Разберем все случаи:
1.1) $\xi_- = [a_1, \dots, a_{2t}, k+2]$, $k+2 \leq a_{2t+1}$.
Тогда

$$\xi - \xi_- = \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{2t}, k+2\rangle\langle a_1, \dots, a_{2t}, k+1\rangle} \geqslant \frac{1}{(k+3)^2 q_{2t}^2}. \quad (47)$$

Следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_{2t}^2(k+3)^2}{\varphi^{n_\varphi+k}} \leqslant \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi-4}} = \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}-5}}. \quad (48)$$

1.2) Получаем по лемме 5.1 $\xi = [a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}]$, а $\xi_- = [a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}, a_{2t+2}]$, $k+1 = a_{2t+1}$.
Следовательно

$$\delta > \xi - \xi_- = \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}\rangle\langle a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}, z\rangle} \geqslant \frac{1}{(z+1)q_{2t+1}^2}. \quad (49)$$

А значит

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{(z+1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+a_{2t+1}+z-1}} \leqslant \frac{q_{2t+1}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}-1}}. \quad (50)$$

2) Аналогично прошлому случаю имеем
$\xi = [0; a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}]$, $k+1 = a_{2t+1}$.
Поскольку $\delta > \xi_{++} - \xi$, получаем:

$$\delta > \xi_{++} - \xi = \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}\rangle\langle a_1, \dots, a_{2t}, a_{2t+1}-1, 1, z\rangle} \geqslant \frac{1}{(z+1)q_{2t+1}^2}. \quad (51)$$

А значит, как и в случае 1.2

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_{2t+1}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}-3}}. \tag{52}$$

Объединяя все рассмотренные случаи, из формул (48), (50) и (52) получаем утверждение леммы. □

Замечание. Леммы 5.3 и 5.2 являются непосредственным обобщением соответствующих лемм из [3].

6 Сравнение континуантов

Пусть x имеет разложение в цепную дробь $[a_1, a_2, \ldots, a_t, \ldots]$. Обозначим:

$$\varkappa_\varphi(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}}{t} + 2\frac{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_t^\varphi(x)}{t}$$

$$\varkappa_\tau(x) = \lim_{t\to\infty} 2\frac{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}}{t} + \frac{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_t^\tau(x)}{t}. \tag{53}$$

Из лемм 5.2 и 5.3 видно, что для того, чтобы оценивать производную $g_{\varphi^{-1}}(x)$ исходя из $\varkappa_\varphi(x)$, достаточно найти асимптотику максимума и минимума континуантов с заданным $S_t^\varphi(x) \sim \varkappa_\varphi(x)t$ при $t \to \infty$, аналогично для $S_t^\tau(x)$. Обозначим через $M^\varphi(n, S_n)$ множество континуантов $\langle A\rangle$ с фиксированной длиной n и фиксированной суммой $S_n^\varphi(A) = S_n$, введем также $\max(M^\varphi(n, S_n))$ и $\min(M^\varphi(n, S_n))$ - соответственно максимальное и минимальное значение континуантов из множества $M^\varphi(n, S_n)$. Для решения поставленной задачи достаточно уметь находить их с точностью до некоторой, не зависящей от n и A константы. То есть требуется найти такие функции $f^\varphi(n, S_n)$ и $g^\varphi(n, S_n)$, что
$\max(M^\varphi(n, S_n)) \asymp f^\varphi(n, S_n)$,
$\min(M^\varphi(n, S_n)) \asymp g^\varphi(n, S_n)$.
Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что n четно.

Аналогично можем определить множество $M^\tau(n, S_n)$. Заметим, что между множествами $M^\varphi(n, S_n)$ и $M^\tau(n, S_n)$ существует биективное соответствие: если $\langle \overrightarrow{A}\rangle \in M^\varphi(n, S_n)$, то, поскольку все неполные частные $\langle \overrightarrow{A}\rangle$ при замене $\langle \overrightarrow{A}\rangle \to \langle \overleftarrow{A}\rangle$ изменят четность индекса (т.к. n четно), $\langle \overleftarrow{A}\rangle$ лежит в множестве $M^\tau(n, S_n)$. А значит, так как $\langle \overrightarrow{A}\rangle = \langle \overleftarrow{A}\rangle$, максимумы и минимумы по данным множествам совпадают. Поэтому достаточно исследовать только $\max^\varphi(n, S_n)$ и $\min^\varphi(n, S_n)$.

Будем до конца данной части для простоты опускать верхний индекс φ и писать просто $M(n,S_n), \max(M(n,S_n)), \min(M(n,S_n))$ и $S_n = S_n(A)$.

Для нахождения $\max(n,S_n)$ и $\min(n,S_n)$ будем пользоваться следующим методом: пусть $\langle A\rangle = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ - произвольный континуант из $M(n,S_n)$. Будем действовать на на него некоторыми преобразованиями, то есть изменять континуант так, чтобы длина и сумма S_n сохранялась. Замену континуанта $\langle X\rangle$ на $\langle Y\rangle$ обозначим $\langle X\rangle \to \langle Y\rangle$. Будем пользоваться заменами следующего вида:
1) Отражение - замена

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \tag{54}$$

где $Q = (a_i, a_{i+1}\ldots, a_{j-1}, a_j)$, i и j имеют одинаковую четность.
Пример: замена $\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 1,2,4,3,5\rangle$, в данном случае $P=(1,2)$, $Q=(3,4), R=(5)$
2) Единичная вариация (термин взят из [3]) - замена

$$\begin{gathered}\langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\ldots,a_n\rangle \to\\ \langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i-x,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j+x,a_{j+1},\ldots,a_n\rangle\end{gathered} \tag{55}$$

где $x\in\mathbb{Z}, a_i-x>0, a_j+x>0$, i и j имеют одинаковую четность.
Пример: замена $\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 3,2,3,4,3\rangle$,
3) $(1,2)$-вариация - замена одного из двух видов. В первом случае одно неполное частное четного индекса уменьшается (увеличивается) на x, а другое неполное частное с нечетным индексом увеличивается (уменьшается) на $2x$.

$$\begin{gathered}\langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\ldots,a_n\rangle \to\\ \langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i-x,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j+2x,a_{j+1},\ldots,a_n\rangle\end{gathered} \tag{56}$$

где $x\in\mathbb{Z}, a_i-x>0, a_j+2x>0$, i четно, а j нечетно. Пример:

$$\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 1,3,1,4,5\rangle$$

Во втором случае одно неполное частное четного индекса уменьшается (увеличивается) на x, а два других неполных частных с нечетным индексом соответственно увеличиваются (уменьшаются) на x.:

$$\begin{gathered}\langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\ldots,a_k,\ldots,a_n\rangle \to\\ \langle a_1,\ldots,a_{i-1},a_i-x,a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_j+x,a_{j+1},\ldots,a_k+x,\ldots,a_n\rangle\end{gathered} \tag{57}$$

Где $x\in\mathbb{Z}, a_i-x>0, a_j+x>0, a_k+x>0$, i четно, а j и k нечетны.
Пример:

$$\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 1,3,2,4,4\rangle$$

Очевидно, что все рассмотренные замены сохраняют длину n и сумму S_n, то есть не выводят из множества $M(n, S_n)$. Нетрудно видеть, что действуя на произвольный континуант композицией указанных преобразований, можно получить любой континуант из множества $M(n, S_n)$, в том числе минимальный и максимальный.

Задача поиска $\min(n, S_n)$ достаточно проста, ответ на это вопрос дает теорема 6.2, доказанная ниже. Задача по нахождения максимума сложнее. Для иллюстрации метода его поиска сформулируем следующую лемму.

Лемма 6.1. *Пусть существует такой континуант $\langle N_{max} \rangle$, что для любого континуанта $\langle A \rangle \in M(n, S_n)$ найдется последовательность преобразований вида 1-3*

$$\langle A \rangle \to \langle A_1 \rangle \to \langle A_2 \rangle \to \ldots \to \langle A_t \rangle \to \ldots \to \langle N_{max} \rangle, \tag{58}$$

где $\frac{\langle A_i \rangle}{\langle A_{i+1} \rangle} < 2$, причем количество тех значений i, для которых $\langle A_i \rangle > \langle A_{i+1} \rangle$, ограничено некоторой, не зависящей от A и n, константой m. Тогда $\langle N_{max} \rangle \asymp max(n, S_n)$

Доказательство. Пусть $\langle N_{max} \rangle$ - не максимальный континуант. Тогда применим к максимальному континуанту последовательность преобразований из условия, которая преобразует его в $\langle N_{max} \rangle$. Очевидно, что он уменьшится не более, чем в 2^m раз, то есть $\langle N_{max} \rangle$ отличается от максимума не более, чем в 2^m раз, где m не зависит от n и A. Что и требовалось доказать. $\square$

Назовем последовательность преобразований из формулировки леммы 6.1 *алгоритмом приведения к максимуму.* Аналогичная лемма, очевидно, верна для алгоритма приведения к минимуму.

Доказательство существования последовательности (58) мы будем строить до конца данной части. Для этого будем исследовать, какие преобразования типа 1-3 заведомо увеличивают (или уменьшают) континуант. Рассмотрим преобразование отражения, пусть $\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle$ заменяется на $\langle \overrightarrow{A}, \overleftarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle$. В каких случаях можно однозначно утверждать, увеличивается ли при этом континуант?

В 1956 году Т.Моцкин и Е.Штраус доказали следующую лемму:

Лемма 6.2. *[11]. Если для натуральных a, b, c, d выполнено неравенство*

$$(b - f)(c - e) > 0,$$

то:

$$\langle \overrightarrow{A}, b, c, \overrightarrow{B}, e, f, \overrightarrow{C} \rangle \geqslant \langle \overrightarrow{A}, b, e, \overleftarrow{B}, c, f, \overrightarrow{C} \rangle.$$

При этом среди последовательностей неполных частных A, B, C могут быть пустые.

Неформально говоря, надо к большей цифре поставить большую цифру, чтобы увеличить континуант, например

$$43 = \langle 1,2,3,4\rangle > \langle 1,3,2,4\rangle = 40.$$

В 2000 году И.Д.Кан получил следующее обобщение этого правила.

Лемма 6.3. *[12]. Неравенство $\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \geqslant \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle$ выполнено тогда и только тогда, когда*

$$([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])([\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]) \geqslant 0, \tag{59}$$

причем неравенства могут обращаться в равенства только одновременно. Утверждение леммы остается верным, если среди наборов A, B, C есть пустые (соответствующие цепные дроби тогда равны 0)

В частности, им была получена следующая формула:

$$\frac{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle}{\langle \overrightarrow{P}\rangle\langle \overrightarrow{Q}\rangle\langle \overrightarrow{R}\rangle} = ([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}]) \tag{60}$$

Отсюда выводится тривиальное, но полезное следствие

Следствие 6.1. *[3]. В результате преобразования отражения континуант изменяется не более, чем в 2 раза.*

Доказательство. Поскольку каждая из цепных дробей в числителе правой части равенства (60) не превосходит 1, имеем

$$|\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle| \leqslant \langle \overrightarrow{P}\rangle\langle \overrightarrow{Q}\rangle\langle \overrightarrow{R}\rangle \tag{61}$$

А поскольку выполнены неравенства

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle > \langle \overrightarrow{P}\rangle\langle \overrightarrow{Q}\rangle\langle \overrightarrow{R}\rangle \text{ и } \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle > \langle \overrightarrow{P}\rangle\langle \overrightarrow{Q}\rangle\langle \overrightarrow{R}\rangle, \tag{62}$$

то очевидно получаем требуемое. □

Оценим теперь, насколько меняется континуант при преобразованиях типа 2), то есть единичных вариациях. Докажем, что вместо максимума по $M(n, S_n)$ можно искать максимум по меньшему множеству

$M_4(n, S_n) \subset M(n, S_n)-$ по множеству континуантов, в котором все неполные частные одинаковой четности отличаются не более, чем на 1 т.е. имеют вид $\{a, a+1\}$ и $\{b, b+1\}$ соответственно. Введем для краткости для произвольного континуанта $\langle A \rangle$ следующие обозначения:
$Odd(A)$ - множество $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\exists j \in \mathbb{N} : j -$ нечетно, $a_j = k$.
$Even(A)$ - множество $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\exists j \in \mathbb{N} : j -$ четно, $a_j = k$.
Введем также множество $N(A) = \{Odd(A), Even(A)\}$

Например, для $\langle A \rangle = \langle 1, 2, 1, 3, 5, 3, 1, 4 \rangle$
$Odd(A) = \{1, 5\}, Even(A) = \{2, 3, 4\}, N(A) = (\{1, 5\}, \{2, 3, 4\})$.

Покажем, что для любого континуанта из $M(n, S_n)$ существует последовательность единичных вариаций, в которой все преобразования кроме, возможно, двух является увеличивающими, приводящая исходный континуант $\langle A \rangle$ в некоторый зависящий от него континуант $\langle A' \rangle$, принадлежащий множеству $M_4(n, S_n)$, то есть $N(A') \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$ для некоторых натуральных a и b. Это и будет означать, что максимум по множеству $M_4(n, S_n)$ не более, чем в константу раз отличается от максимума по $M(n, S_n)$.

Теорема 6.1 (О единичной вариации)**.** $\max(M(n, S_n)) \asymp \max(M_4(n, S_n))$.

Будем доказывать теорему, действуя на исходный континуант $\langle A \rangle$ преобразованиями типа 2) так, чтобы он перешел в описанное множество, то есть рассмотрим последовательность континуантов

$$\langle A \rangle \to \langle A_1 \rangle \to \langle A_2 \rangle \to \ldots \to \langle A_m \rangle \tag{63}$$

такую, что $\langle A_m \rangle \in M_4(n, S_n)$ и для любого $i \leqslant m$ кроме, возможно, двух, $\langle A_i \rangle \geqslant \langle A_{i-1} \rangle$, при этом $\langle A_i \rangle$ получается из $\langle A_{i-1} \rangle$ действием преобразования типа 2. Доказательство будет состоять из нескольких леммм.

Уточнение параметров. Пусть $\langle A \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in M(n, S_n)$ не лежит в $M_4(n, S_n)$. Тогда в нем есть 2 элемента a_i и a_j с индексами одинаковой четности такие, что $|a_i - a_j| > 1$. Запишем a_i как $a + x$ и a_j как $a - x$, сам континуант тогда примет вид

$$\langle P, a + x, Q, a - x, R \rangle = f(x).$$

При этом если a_i и a_j одинаковой четности, то a - целое и если они разной четности, то a - полуцелое. Соответственно, $f(x)$ есть функция целого или полуцелого аргумента. Рассматривая континуанты при разных x, мы, очевидно, не выходим из $M(n, S_n)$. Найдем, при каких x значение $f(x)$ максимально.

Следующая лемма представляет собой видоизменение соответствующей леммы из [3].

Лемма 6.4. *Максимум f(x) достигается в одной из следующих точек:* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *(при a полуцелом) или* $(-1, 0, 1)$ *(при a целом).*

Доказательство. Докажем лемму для случая, когда P и R непусты. Применяя дважды (14), распишем конитнуант:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle = \langle \underbrace{P}, \underbrace{a+x, Q, a-x}, \underbrace{R} \rangle = \\ = \langle P\rangle\langle a+x, Q, a-x\rangle\langle R\rangle + \langle P^-\rangle\langle Q, a-x\rangle\langle R\rangle + \\ +\langle P\rangle\langle a+x, Q\rangle\langle R_-\rangle + \langle P\rangle\langle Q_-^-\rangle\langle R\rangle.\end{aligned} \tag{64}$$

Будем использовать в сумме знак $O(1)$, означающий сумму не зависящих от x членов, поскольку на максимум $f(x)$ они, очевидно, не влияют. В частности, в него можно сразу занести последний член правой части равенства (64). Продолжим равенство:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle = \langle P\rangle\langle a+x, Q, a-x\rangle\langle R\rangle + \langle P^-\rangle\langle Q, a-x\rangle\langle R\rangle + \langle P\rangle\langle a+x, Q\rangle\langle R_-\rangle + O(1) = \\ = \langle P\rangle\langle R\rangle(\langle a+x, Q\rangle(a-x) + \langle a+x, Q^-\rangle) + \langle P^-\rangle\langle R\rangle((a-x)\langle Q\rangle + \langle Q^-\rangle) + \\ + \langle P\rangle\langle R_-\rangle((a+x)\langle Q\rangle + \langle Q_-\rangle) + O(1) = \langle P\rangle\langle R\rangle((a^2-x^2)\langle Q\rangle + (a-x)\langle Q_-\rangle + \\ + (a+x)\langle Q^-\rangle) - x\langle P^-\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle + x\langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R_-\rangle + O(1) = \\ = -x^2\langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle + x(\langle P\rangle\langle Q^-\rangle\langle R\rangle - \langle P\rangle\langle Q_-\rangle\langle R\rangle + \langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R_-\rangle - \langle P^-\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle) + O(1).\end{aligned} \tag{65}$$

Получаем квадратный трехчлен, выразим координату его вершины x_m :

$$\begin{aligned}x_m = \frac{\langle P\rangle\langle Q^-\rangle\langle R\rangle - \langle P\rangle\langle Q_-\rangle\langle R\rangle + \langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R_-\rangle - \langle P^-\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle}{2\langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle} = \\ = \frac{[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}] + [\overrightarrow{R}] - [\overleftarrow{P}]}{2}.\end{aligned} \tag{66}$$

Так как все цепные дроби в формуле (66) лежат на отрезке от 0 до 1, то, очевидно, $-1 < x_m < 1$, а значит, если $x_m > 0$, то $f(1) > f(n+1), f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2}+n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, аналогично для $x_m < 0$. Случай, когда P или R пустые, - аналогичен. Лемма доказана. □

Таким образом, в случае, когда $a_i - a_j$ нечетно, замена

$$\langle P, a+x, Q, a-x, R\rangle \to \langle P, a \pm \frac{1}{2}, Q, a \mp \frac{1}{2}, R\rangle \tag{67}$$

увеличивает континуант. При этом если $x_m \geqslant 0$, в формуле (67) сначала идет знак $+$, а затем $-$, а если $x_m \leqslant 0$, то наоборот. Рассмотрим случай, когда $a_i - a_j$ четно. Из доказанной леммы следует, что если $|a_i - a_j| \geqslant 4$, то к этой паре неполных частных можно применить увеличивающую единичную вариацию. Если же $|a_i - a_j| = 2$, то ситуация сложнее. Разбору этого случая и будет посвящено все дальнейшее доказательство теоремы. Прежде всего выведем из леммы 6.4 важное следствие, которое мы будем неоднократно использовать в дальнейшем:

Следствие 6.2. *Если* $|a_i - a_j| = 2$ *и* $|x_m| \leqslant \frac{1}{2}$, *то замена*

$$\langle P, a \pm 1, Q, a \mp 1, R \rangle \to \langle P, a, Q, a, R \rangle$$

увеличивает континуант.

Доказательство. Действительно, в этом случае, $f(0) \geqslant f(1)$ и $f(0) \geqslant f(-1)$, а следовательно максимум $f(x)$ по целым точкам достигается в точке 0, что и требовалось доказать. □

Таким образом, применяя единичную вариацию, мы можем сделать так, чтобы все неполные частные континуанта $\langle A_k \rangle$ с индексами одинаковой четности отличались не более, чем на 2, где A_k принадлежит последовательности континуантов (63), то есть

$$N(A_k) \subseteq (\{a-1, a, a+1\}, \{b-1, b, b+1\}).$$

Если существуют неполные частные a_i и a_j с индексами одинаковой четности такие, что $a_i - a_j = 2$, то рассмотрим замену

$$\langle P', a_i, Q', a_j, R' \rangle \to \langle P', a_i - 1, Q', a_j + 1, R' \rangle. \tag{68}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что i и j четные. Тогда выполнено следующее:

Лемма 6.5. *Если* $Even(A_k) = \{a-1, a, a+1\}$, $a \neq 2$ *и* $Odd(A_k) \nsubseteq \{1, 2\}$, *то существует единичная вариация, увеличивающая* $\langle A_k \rangle$.

Доказательство. Выберем в $\langle A_k \rangle$ произвольные неполные частные $a_i = a + 1$ и $a_j = a - 1$, i и j четные. Рассмотрим замену, определенную формулой (68). Заметим, что если $1 \notin Odd(A_k)$, то все цепные дроби из формулы (66) меньше $\frac{1}{2}$, следовательно, $|x_m| < \frac{1}{2}$, а значит по следствию 6.2 замена (68) увеличивает континуант.

Пусть теперь $\{1\} \in Odd(A_k)$, тогда $Odd(A_k) \subseteq \{1, 2, 3\}$. Докажем, что если $\{3\} \in Odd(A_k)$, то увеличивающая единичная вариация существует.

Действительно, поскольку по условию $1 \notin Even(A_k)$, то применяя единичную вариацию к произвольным неполным частным, равным 1 и 3, мы можем сказать, что все цепные дроби в формуле (66) меньше $\frac{1}{2}$, а значит по следствию 6.2 замена

$$\langle P_1, 3, Q_1, 1, R_1\rangle \to \langle P_1, 2, Q_1, 2, R_1\rangle \tag{69}$$

увеличивает континуант. Что и требовалось доказать. □

Докажем теперь, что в случае, когда $Odd(A_k) \subseteq \{1, 2\}$ также существует увеличивающая единичная вариация:

Лемма 6.6. *Пусть* $N(A_k) = (\{a-1, a, a+1\}, \{1, 2\}), a > 2$, *тогда единичная вариация, определенная формулой (68) увеличивает континуант.*

Доказательство. Воспользуемся Леммой 6.4. Максимальное значение цепных дробей из формулы 66 меньше либо равно

$$[1, a+1, 1] = \frac{a+2}{a+3} = 1 - \frac{1}{a+3},$$

а минимальное больше либо равно

$$[2, a-1] = \frac{a-1}{2a-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}.$$

Поэтому, подставляя данные оценки в формулу (66), получим:

$$\begin{aligned}|x_m| \leqslant \frac{2(1 - \frac{1}{a+3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}))}{2} &= 1 - \frac{1}{a+3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{4a-2} = \frac{1}{2} - \frac{3a-5}{(a+3)(4a-2)}.\end{aligned} \tag{70}$$

Поскольку $\frac{3a-5}{(a+3)(4a-2)} > 0$ при $a \geq 2$, имеем $|x_m| < \frac{1}{2}$. Пользуясь следствием 6.2, получаем утверждение леммы. □

Таким образом, осталось расмотреть случай, когда $N(A_k) \subseteq (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\})$.

Лемма 6.7. *Пусть* $N(A_k) \subseteq (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\})$, *тогда для самой близкой в смысле разности индексов пары* (a_i, a_j) *такой, что* $a_i = 3$ *и* $a_j = 1$, *где* i *и* j *имеют одинакоую четность, замена (69) увеличивает континуант.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что i и j четные. Рассмотрим замену (69) и разность $[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]$ из формулы (66). Заметим, что все неполные частные Q, имеющие в $\langle A_k\rangle$ четный индекс, равны 2, т.к. иначе существовала бы более близкая пара с 1 или 3, а все неполные частные Q, имеющие в $\langle A_k\rangle$ нечетный индекс, отличаются не более, чем на 1 (т.е. равны 1 и 2 или 2 и 3). Таким образом

$$|[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]| \leqslant [1,2,1,2\ldots]-[2,2,2,2\ldots] \leqslant [1,2,1]-[2,2]=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{20}.$$

Рассмотрим теперь внешнюю разность

$$|[\overrightarrow{R}]-[\overleftarrow{P}]| \leqslant [1,3,1,3\ldots]-[3,1,3,1\ldots] \leqslant [1,3,1]-[3,1]=\frac{4}{5}-\frac{1}{4}=\frac{11}{20}.$$

Следовательно

$$|x_m|=\frac{|[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]|+|[\overrightarrow{R}]-[\overleftarrow{P}]|}{2} \leqslant \frac{\frac{7}{20}+\frac{11}{20}}{2}=\frac{9}{20}<\frac{1}{2}.$$

Отсюда по следствию 6.2 и следует утверждение леммы. $\square$

Отметим, что в случае, когда мы применяем единичную вариацию к паре неполных частных, одно из которых является правым концом континуанта, соответствующая x_m из формулы (66) равна $\frac{[\overleftarrow{B}]-[\overrightarrow{B}]-[\overleftarrow{A}]}{2}$, что больше -1 и меньше $\frac{1}{2}$, аналогично для левого конца. В этих случаях единичная вариация может уменьшать континуант, но таких преобразований будет не более двух, и каждое уменьшит континуант не более, чем в 2 раза.

Таким образом, из лемм 6.4-6.7 следует, что если

$$N(A) \nsubseteq (\{a,a+1\},\{b,b+1\})$$

ни для каких натуральных a и b, то существует единичная вариация, увеличивающая $\langle A\rangle$. Теорема 6.1 доказана полностью.

Введем новое обозначение. Пусть дан произвольный континуант
$\langle C\rangle=\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$, тогда обозначим через
$((c_{i_1}\to c'_{i_1}),(c_{i_1}\to c'_{i_1}),\ldots,(c_{i_k}\to c'_{i_k}))$
замену
$\langle c_1,c_2,\ldots,c_{i_1-1},c_{i_1},c_{i_1+1}\ldots,c_{i_2-1},c_{i_2},c_{i_2+1}\ldots,c_{i_k-1},c_{i_k},c_{i_k+1}\ldots,c_{n-1},c_n\rangle \to$
$\langle c_1,c_2,\ldots,c_{i_1-1},c'_{i_1},c_{i_1+1}\ldots,c_{i_2-1},c'_{i_2},c_{i_2+1}\ldots,c_{i_k-1},c'_{i_k},c_{i_k+1}\ldots,c_{n-1},c_n\rangle$,
то есть заменяем только элементы c_{i_j}, остальные неполные частные остаются теми же.
Докажем теперь теорему о минимуме.

Теорема 6.2. $\min(n, S_n) \asymp \langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, s \rangle$, *где* $s = S_n - \frac{3n-4}{2}$.

Доказательство. Пусть $\langle A \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, выберем $a_i = \max(Even(A))$ - максимальное неполное частное четного индекса. Если существует четное h такое, что $a_i = a_h$, произведем замену

$$((a_i \to a_i + a_h - 1), (a_h \to 1)),$$

она увеличит континуант не более, чем в 2 раза. Тогда в новом континуанте $\langle A \rangle$ элемент a_i' станет единственным максимальным неполным частным.

Из леммы 6.4 следует, что поскольку график функции

$$f(x) = \langle A, a + x, B, a - x, C \rangle -$$

парабола с вершиной x_m, $|x_m| < 1$, то

$$f(x+1) < f(x) \ \forall x \geqslant \frac{1}{2} \text{ и } f(x-1) < f(x) \ \forall x \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, любая замена

$$((a_i \to a_i + a_j - 1), (a_j \to 1)), \text{ где } j - \text{четно},$$

уменьшит континуант, поскольку при этом разность между неполными частными, для которых мы применяем единичную вариацию, увеличится. Будем производить такие замены, пока все неполные частные четного индекса, кроме a_i, не станут равны 1.

Произведем аналогичную процедуру для неполных частных нечетного индекса. Получим континуант содержащий не более 2 неполных частных, отличных от 1. Он будет иметь вид

$$\langle 1, \ldots, 1, \widetilde{a_i}, 1, \ldots, 1, \widetilde{a_j}, 1, \ldots, 1 \rangle.$$

Если a_j нечетно, произведем следующую замену

$$((\widetilde{a_i} \to \widetilde{a_i} + 2\widetilde{a_j}), (\widetilde{a_j} \to 1))$$

Если же a_j четно, то произведем другую замену

$$((\widetilde{a_i} \to \widetilde{a_i} + 2\widetilde{a_j} - 2), (\widetilde{a_j} \to 2))$$

Очевидно, что любая такая замена увеличит континуант не более, чем в 2 раза. Таким образом, полученный континуант имеет вид

$$\langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, s, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i} \rangle \text{ или } \langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, s, \underbrace{1, \ldots, 1}_{j-i-1}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-j} \rangle,$$

что не более, чем в константу раз отличается от $\langle\underbrace{1,\ldots,1,}_{n-1}s\rangle$, что и требовалось доказать. $\square$

Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} c^{(1)}_{a,a+1;b} &= [b,a+1,b], \quad c^{(2)}_{a,a+1;b} = [b+1,a],\\ c^{(1)}_{a;b,b+1} &= [a,b+1,a], \quad c^{(2)}_{a;b,b+1} = [a+1,b]. \end{aligned} \tag{71}$$

Лемма 6.8. *Пусть $\langle A\rangle = \langle P,a,R\rangle = \langle P_1,b,R_1\rangle$-континуант, для которго $N(A)\subseteq(\{a,a+1\},\{b,b+1\})$ и при этом P,Q,P_1,Q_1 состоят по крайней мере из 2 неполных частных. Тогда выполнены следующие оценки:*

$$\textbf{\textit{(i)}}\quad 1+\frac{1}{a+2c^{(1)}_{a,a+1;b}} = \frac{a+1+2c^{(1)}_{a,a+1;b}}{a+2c^{(1)}_{a,a+1;b}} \leqslant \frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a+1+2c^(2)_{a,a+1;b}}{a+2c^{(2)}_{a,a+1;b}} = 1+\frac{1}{a+2c^{(2)}_{a,a+1;b}} \tag{72}$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\quad 1+\frac{1}{b+2c^{(1)}_{a;b,b+1}} = \frac{b+1+2c^{(1)}_{a;b,b+1}}{b+2c^{(1)}_{a;b,b+1}} \leqslant \frac{\langle P_1,b+1,R_1\rangle}{\langle P_1,b,R_1\rangle} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{b+1+2c^{(2)}_{a;b,b+1}}{b+2c^{(2)}_{a;b,b+1}} = 1+\frac{1}{b+2c^{(2)}_{a;b,b+1}} \tag{73}$$

Доказательство. Докажем первую оценку. Применяя равенства (13) и (14), получаем:

$$\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle} = \frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P\rangle\langle R\rangle}\frac{\langle P\rangle\langle R\rangle}{\langle A,a,B\rangle} =$$

$$= \frac{(a+1)\langle P\rangle\langle R\rangle + \langle P^-\rangle\langle R\rangle + \langle P\rangle\langle R_-\rangle}{\langle P\rangle\langle R\rangle}\frac{\langle P\rangle\langle R\rangle}{a\langle P\rangle\langle R\rangle + \langle P^-\rangle\langle R\rangle + \langle P\rangle\langle R_-\rangle} =$$

$$= \frac{a+1+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}{a+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]} = 1+\frac{1}{a+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}. \tag{74}$$

Оценивая цепные дроби правой части последнего равенства снизу через $c^{(2)}_{a,a+1;b}$, а сверху через $c^{(1)}_{a,a+1;b}$, получаем оценку (72); оценка (73) доказывается аналогично. При этом мы пользуемся тем, что увеличение неполного частного нечетного индекса увеличивает цепную дробь, а увеличение неполного частного четного индекса, соответственно, уменьшает. Кроме того, любая подходящая к x дробь четного порядка меньше x, а нечетного порядка - больше x.

Соответственно, дробь $[b, a+1, b]$ является максимумом по множеству цепных дробей вида $[A]$, где $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$ и длина A больше 1. По тем же причинам дробь $[b+1, a]$ является минимумом на описанном множестве цепных дробей. Второй случай абсолютно аналогичен. $\square$

Таким образом, мы получили верхние и нижние оценки изменения континуанта при заменах вида

$$(a \to a+1) \text{ и } (b \to b+1)$$

Отдельно выделим формулу:

$$\frac{\langle P, a+1, R\rangle}{\langle P, a, R\rangle} = \frac{a+1+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}{a+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]} \tag{75}$$

Отметим, что если P или R имеют длину меньше 2, то можно оценить цепные дроби сверху единицей, а снизу нулем, тогда формула (75) превратится в

$$\frac{4}{3} \leqslant \frac{\langle P, a+1, R\rangle}{\langle P, a, R\rangle} \leqslant \frac{a+3}{a+2} \leqslant \frac{a+1}{a} \leqslant 2$$

Обозначим

$$c_l(a, a+1; b) = 1 + \frac{1}{a + 2c^{(1)}_{a,a+1;b}} \text{ и } c_r(a, a+1; b) = 1 + \frac{1}{a + 2c^{(2)}_{a,a+1;b}}$$

нижняя и верхняя оценки на величину $\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle}$ из неравенства (72). Аналогично определим

$$c_l(a; b, b+1) = 1 + \frac{1}{b + 2c^{(1)}_{a;b,b+1}} \text{ и } c_r(a; b, b+1) = 1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a;b,b+1}}$$

нижнюю и верхнюю оценки на величину $\frac{\langle P',a+1,R'\rangle}{\langle P',a,R'\rangle}$ из неравенства (73). Рассмотрим теперь замену

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

в континуанте $\langle A\rangle$, для которого $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{(b, b+1\})$, то есть замену *любого* неполного частного с нечетным индексом, равного a, на $a+1$ и замена *любых* двух неполных частных с четным индексом, равных $b+1$, на b. Нетрудно видеть, что рассмотренная замена является $(1,2)-$вариацией. Выясним, пользуясь оценками предыдущей леммы, в каких случаях можно заведомо утверждать, что она увеличивает континуант. Для этого докажем следующее простое, но крайне полезное в дальнейшем утверждение.

Лемма 6.9. *Пусть $\langle A\rangle$ - произвольный континуант, для которого выполнено $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$. Если при этом*

$$c_l(a, a+1, b) > c_r^2(a, b, b+1),$$

то замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

увеличивает континуант.
Если же

$$c_r(a, a+1, b) < c_l^2(a, b, b+1),$$

то замена

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

увеличивает континуант.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно один раз применить неравенство (72) и дважды - неравенство (73). Второе утверждение доказывается аналогично. □

Назовем $(1,2)-$вариации, для которых выполняются условия леммы 6.9, **абсолютно увеличивающими**. Найдем конкретное выражение таких замен.

Лемма 6.10. $(1,2)-$*вариации*

$$((a \to a+1), (2a+2 \to 2a+1), (2a+2 \to 2a+1))$$

при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a+1, 2a+2\})$ *и* $a \geqslant 1$
и

$$((a+1 \to a), (2a \to 2a+1), (2a \to 2a+1))$$

при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a, 2a+1\})$ *и* $a \geqslant 2$
являются абсолютно увеличивающими.

Доказательство. Проверим выполнение условий предыдущей леммы. Поскольку

$$c_l(a, a+1; 2a+1) = \frac{4a^4 + 12a^3 + 21a^2 + 18a + 7}{4a^4 + 8a^3 + 13a^2 + 9a + 4}$$

$$c_r^2(a; 2a+1, 2a+2) = \frac{4(2a^3 + 5a^2 + 7a + 3)^2}{(4a^3 + 8a^2 + 11a + 4)^2},$$

то, сравнивая оценки, получаем:

$$\begin{aligned} &c_l(a, a+1; 2a+1) - c_r^2(a; 2a+1, 2a+2) = \\ &= \frac{16a^8 + 96a^7 + 264a^6 + 432a^5 + 417a^4 + 198a^3 - 29a^2 - 92a - 32}{(4a^3 + 8a^2 + 11a + 4)^2(4a^4 + 8a^3 + 13a^2 + 9a + 4)} \end{aligned} \tag{76}$$

что, очевидно, больше нуля при $a \geqslant 1$.
Докажем аналогично вторую часть леммы: из

$$c_r(a, a+1; 2a) = \frac{2a^3 + 3a^2 + 4a + 1}{2a^3 + a^2 + 3a},$$

$$c_l^2(a; 2a, 2a+1) = \frac{(4a^4 + 4a^3 + 9a^2 + 4a + 2)^2}{4(2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 1)^2},$$

получаем, что:

$$\begin{aligned} &c_l^2(a; 2a, 2a+1) - c_r(a, a+1; 2a) = \\ &= \frac{8a^9 + 12a^8 + 18a^7 + 13a^6 - 13a^5 - 24a^4 - 36a^3 - 28a^2 - 12a - 4}{4a(2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 1)^2(2a^2 + a + 3)}, \end{aligned} \tag{77}$$

что больше нуля при $a \geqslant 2$. Лемма доказана. □

Доказанная лемма представляет собой "граничный"случай:
при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a, 2a+1\})$ для увеличения континуанта необходимо увеличить неполные частные с четным индексом и уменьшить с нечетным, а при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a+1, 2a+2\})$ - наоборот увеличить с нечетным и уменьшить с четным. Остальные случаи, как утверждает следующая лемма, проще:

Лемма 6.11 (Лемма о монотонности)**.** *Если замена*

$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$ *при* $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})-$

абсолютно увеличивающая $(1, 2)-$ *вариация, то замены*

$((a-1 \to a), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$ *при* $N(A) = (\{a-1, a\}, \{b, b+1\})$,

$((a \to a{+}1), (b{+}2 \to b{+}1), (b{+}2 \to b{+}1))$ *при* $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b+1, b+2\})$ *являются абсолютно увеличивающими.*
Если же, напротив

$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$ *при* $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})-$

абсолютно увеличивающая замена, то $(1, 2)-$*вариации*

$((a{+}2 \to a{+}1), (b \to b{+}1), (b \to b{+}1))$ *при* $N(A) = (\{a+1, a+2\}, \{b, b+1\})$,

$((a+1 \to a), (b-1 \to b), (b-1 \to b))$ *при* $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b-1, b\})$

также являются абсолютно увеличивающими заменами.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Поскольку первые неполные частные цепных дробей $c^{(1)}_{a,a+1;b}$ и $c^{(1)}_{a-1,a;b}$ совпадают, эти дроби отличаются не более, чем на $\frac{1}{2}$. Следовательно, выполнена цепочка неравенств:

$$c_l(a, a+1; b) = 1 + \frac{1}{a + 2c^{(1)}_{a,a+1;b}} < 1 + \frac{1}{a - 1 + 2c^{(1)}_{a-1,a;b}} = c_l(a-1, a; b)$$

Сравним теперь $c_r^2(a; b, b{+}1)$ и $c_r^2(a{-}1; b, b{+}1)$. Они равны соответственно

$$(1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a;b,b+1}})^2 \text{ и } (1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a-1;b,b+1}})^2.$$

Заметим, что:

$$c^{(2)}_{a;b,b+1} = [a+1, b] < [a, b] = c^{(2)}_{a-1;b,b+1},$$

а следовательно

$$c_r^2(a; b, b+1) > c_r^2(a-1; b, b+1)$$

Поскольку по условию $c_r^2(a, b, b+1) < c_l(a, a+1, b)$, получаем, что

$$c_r^2(a-1; b, b+1) < c_r^2(a; b, b+1) < c_l(a, a+1; b) < c_l(a-1, a; b).$$

Для завершения доказательства первого утверждения остается применить лемму 6.9. Остальные утверждения доказываются аналогично. □

Во всех дальнейших леммах данной части мы будем пользоваться следующим, не ограничивающим общность, предположением:
если рассматривается замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b)) \text{ при } N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\}),$$

то существует хотя бы 2 неполных частных нечетного индекса, равных $b+1$; если же рассматривается замена

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1)) \text{ при } N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\}),$$

то существует хотя бы 2 неполных частных нечетного индекса, равных b.

Следствие 6.3. *Если $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b, b+1\}), a \geqslant 2$, то для континуанта $\langle A \rangle$ существует абсолютно увеличивающая $(1,2)-$вариация.*

Доказательство. Действительно, если $b \leqslant 2a$, то по леммам 6.10 и 6.11 замена

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

является абсолютно увеличивающей. Если же $b \geqslant 2a+1$, то аналогично замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

является абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. □

Лемма 6.12. *Если $N(A) = (\{a\}, \{b, b+1\})$ и при этом b не равно $2a-1$ или $2a$ и $a > 1$, то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая $(1,2)-$вариация.*

Доказательство. Пусть $b < 2a-1$. Тогда рассмотрим замену

$$((a \to a-1), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

Поскольку $N(A) \subset (\{a-1, a\}, \{b, b+1\})$, по леммам 6.10 и 6.11 она будет абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай $b > 2a$. □

Лемма 6.13. *Если $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b\})$ и при этом $b \neq 2a+1$ и $a > 1$, то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая $(1,2)-$вариация.*

Доказательство. Пусть $b < 2a-1$. Тогда рассмотрим замену

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

Поскольку $N(A) \subset (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$, по леммам 6.10 и 6.11 она будет абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай $b > 2a-1$. □

Лемма 6.14. *Если* $N(A) = (\{a\}, \{b\}), a \geqslant 2$ *и при этом* b *не равно* $2a-1, 2a$ *или* $2a+1$, *то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая* $(1,2)-$*вариация.*

Доказательство. Аналогично леммам 6.12 и 6.13. □

Введем множество $M_3(n, S_n) \subset M_4(n, S_n) \subset M(n, S_n)$ - подмножество $M_4(n, S_n)$, состоящее из континуантов $\langle A \rangle$, для которых выполнено одно из следующих трех условий:

$$\begin{aligned} 1) N(A) &\subseteq (\{a\}, \{2a-1, 2a\}) \\ 2) N(A) &\subseteq (\{a\}, \{2a, 2a+1\}) \\ 3) N(A) &\subseteq (\{a, a+1\}, \{2a+1\}) \end{aligned} \tag{78}$$

Во всех случаях считаем, что $a \geqslant 2$. Рассмотрим также $\max(M_3(n, S_n))$ - максимум по множеству $M_3(n, S_n)$.

Теорема 6.3 (О сведении к трем неполным частным)**.**
Если $\frac{S_n}{n} \geqslant 8$, *то* $\max(M(n, S_n)) \asymp \max(M_3(n, S_n))$

Доказательство. Рассмотрим произвольный континуант $\langle A \rangle \in M(n, S_n)$. Докажем, что если он не лежит в $M_3(n, S_n)$, то существует последовательность увеличивающих преобразований, сохраняющих длину n и S_n и приводящих $\langle A \rangle$ в данное множество. Из теоремы 6.1 можно считать, что данный континуант лежит в множестве $M_4(n, S_n) \setminus M_3(n, S_n)$. Для этого покажем, что существует $(1,2)$-вариация, увеличивающая континуант $\langle A \rangle$. Пусть $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$. Если $a > 1$ и $\langle A \rangle \notin (M_3(n, S_n))$, то существование увеличивающего преобразования прямо следует из лемм 6.12, 6.13, 6.14 и следствия 6.3.

Рассмотрим случай $a = 1$. Поскольку $\frac{S_n}{n} \geqslant 8,$ то $b \geqslant 3$. Из первого утверждения леммы (6.10) следует, что замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

является абсолютно увеличивающей при $a = 1, b = 3$, а следовательно, по лемме 6.11 она является также увеличивающей при $b > 3$.

Таким образом, показано, что если континуант $\langle A \rangle \notin M_3(n, S_n)$, то для него существует абсолютно увеличивающая $(1,2)-$вариация. Что и требовалось доказать. □

Заметим также, что вид (одно из трех условий в (78)), в который можно привести произвольный континуант в множестве $M_3(n, S_n)$ однозначно определяется отношением $\frac{S_n}{n}$, поскольку для видов 1), 2) и 3)

значение $\frac{S_n}{n}$ принадлежит, соответственно, отрезкам $[4a-1, 4a]$, $[4a, 4a+1]$ или $[4a+1, 4a+3]$. То есть отрезки пересекаются только по концам, соответствующим случаям, когда все неполные частные одинаковой четности совпадают. Таким образом, при фиксированном a

$$\frac{S_n}{n} \in [4a-1, 4a+3]. \tag{79}$$

Следствие 6.4. *Если* $\langle A \rangle \in M_3(n, S_n)$, $N(A) \subset (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$ *то* $a \geqslant \frac{\frac{S_n}{n}-3}{4}$, *а* $b \geqslant 2a-1$.

Доказательство. Первое неравенство очевидно следует из (79), а второе - из (78). □

Осталось, таким образом, найти максимум по континуантам, в которых неполные частные могут принимать не более 3 различных значений. Пусть для определенности $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b\})$. Рассмотрим замены отражением

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle,$$

где $Q = (a, b, \ldots, a+1)$ или $(a+1, b, \ldots, a)$, то есть Q имеет разные начало и конец.

Пусть, например, $Q = (a, b, \ldots, a+1)$, тогда

$$[\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}] = [a, \ldots] - [a+1, \ldots] > 0,$$

поэтому неравенство

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle > \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle$$

выполняется тогда и только тогда, когда $[\overleftarrow{P}] > [\overrightarrow{R}]$.
В случае, если

$$[\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}] = [a+1, \ldots] - [a, \ldots] < 0,$$

неравенство

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle > \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle$$

выполнено тогда и только тогда, когда $[\overleftarrow{P}] < [\overrightarrow{R}]$. А поскольку все неполные частные с четными индексами совпадают, то цепные дроби $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ имеют вид $[b, a_1, b, a_2 \ldots]$, где $a_i \in \{a, a+1\}$. Обозначим их $[b, a_1^P, b, a_2^P, \ldots]$ и $[b, a_1^R, b, a_2^R, \ldots]$ соответственно. Сформулируем еще один критерий сравнения континаунтов.

Лемма 6.15. *Пусть* $\langle A\rangle = \langle P, Q, R\rangle$ *- произвольный континуант, причем* $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b\})$, $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ *и* $q_1 \neq q_m$. *Тогда:*
(***i***) *Если* $q_1 = a, q_m = a+1$, *то замена*

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \tag{80}$$

увеличивает континуант тогда и только тогда, когда $\exists k : a_k^P < a_k^R$, *причем* $\forall i < K\ a_i^P = a_i^R$, *то есть первое отчичающееся неполное частное цепных дробей* $[\overleftarrow{P}]$ *и* $[\overrightarrow{R}]$ *больше в* $[\overrightarrow{R}]$.
(***ii***) *Если* $q_1 = a+1, q_m = a$, *то замена, задаваемая формулой (85) увеличивает континуант тогда и только тогда, когда* $\exists k : a_k^P > a_k^R$, $\forall i < K\ a_i^P = a_i^R$, *то есть первое отчичающееся неполное частное цепных дробей* $[\overleftarrow{P}]$ *и* $[\overrightarrow{R}]$ *больше в* $[\overrightarrow{P}]$.

Доказательство. Заметим, что если цепные дроби $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ отличаются неполным частным с четным индексом, то больше та дробь, у которой отличающееся неполное частное больше. Для завершения доказательства остается только воспользоваться леммой 6.3. $\square$

Заметим, что если одна из цепных дробей (более короткая) обрывается там, где заканчивается континуант, а все неполные частные более короткой цепной дроби совпадают с соответствующими неполными частными длинной, то следующее неполное частное короткой дроби можно считать равным $+\infty$. В самом деле, если короткая цепная дробь состоит из нечетного количества неполных частных, то она больше длинной, а если из четного, то меньше, поскольку является подходящей дробью к более длинной.

Научимся теперь находить максимум по континуантам из множества $M_3(n, S_n)$. Без ограничения общности можем считать, что произвольный континуант $\langle A\rangle \in M_3(n, S_n)$ состоит из блоков (a, b) и $(a+1, b)$. Обозначим их C_0^0 и C_1^0 соответственно.

Лемма 6.16. *Если отношение количества блоков* C_0^0 *к количеству блоков* C_1^0 *равно* $m + \alpha$, *где* $m \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$, *то можно увеличивающими преобразованиями отражения добиться того, чтобы континуант состоял только из блоков*

$$C_0^1 = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m}, C_1^0) \text{ и } C_1^1 = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+1}, C_1^0).$$

Если, напротив, отношение количества блоков C_1^0 *к количеству блоков* C_0^0 *равно* $m + \alpha$, *где* $m \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$, *то можно увеличивающими преобразованиями добиться того, чтобы континуант состоял только из*

блоков

$$C_0^1 = (\underbrace{C_1^0, \dots, C_1^0}_{m}, C_0^0) \text{ и } C_1^1 = (\underbrace{C_1^0, \dots, C_1^0}_{m+1}, C_0^0).$$

Если, наконец, отношение количества блоков равно $m \in \mathbb{N}$, то максимум достигается на периодическом континуанте, состоящим из блоков

$$(C_1^0 \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m}) \text{ или } (\underbrace{C_1^0, \dots, C_1^0}_{m}, C_0^0)$$

в зависимости от того, каких блоков больше - C_0^0 или же C_1^0.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть в континуанте встречается блок $C_k = (C_1^0, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0)$, где $k > 0$. Поскольку отношение числа блоков C_0^0 и C_1^0 больше m, то существует блок $C_t = (\underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m+t})$, где $t > 0$. Пусть блок C_k встречается в континуанте раньше C_t. Тогда посмотрим на предпоследнее неполное частное блока C_k, равное $a_i = a + 1$ и первое неполное частное блока C_t, равное $a_j = a$. Континуант в этом случае имеет вид

$$\langle \overbrace{\dots, C_1^0, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}}, \underbrace{\overbrace{a+1}^{a_i}, b, \dots, \overbrace{a}^{a_j}}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m+t-1} \dots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

Тогда по лемме 6.15 отражение набора Q увеличивает континуант, поскольку первый отличающийся блок за a_i равен $C_1^0 = (a+1, b)$, а за a_j - $C_0^0 = (a, b)$, что и требовалось доказать. Если же напротив C_t идет раньше C_k, то отражение Q

$$\langle \overbrace{\dots, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m+t-1}}^{\overrightarrow{P}} \underbrace{a, b, \dots, a+1,}_{\overrightarrow{Q}} \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0, \dots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

аналогично увеличивает континуант. Таким же образом поступаем, если существует блок $C_t = (\underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m+t+1})$, $t > 0$. В этом случае найдется блок $C_k = (C_1^0, \underbrace{C_0^0, \dots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0)$, $k \geqslant 0$, и аналогичная замена увеличит континуант.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть существет блок $C_k = (C_0^0, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m-k}, C_0^0)$, где $k > 0$. По тем же соображением найдется блок $C_t = (\underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m+t}), t > 0$. Аналогично предположим, что блок C_k идет раньше C_t. Тогда рассмотрим замену отражением Q :

$$\langle \overbrace{\ldots, C_0^0, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}}, \underbrace{a, b, \ldots, a+1}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m+t-1}, \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

При данной замене первое различие цепных дробей $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{Q}]$ будет в $m-k+1-$ом нечетном неполном частном. Поскольку у $[\overleftarrow{P}]$ оно меньше, то отражение Q, которое начинается с a и заканчивается на $a+1$ увеличивает континуант. Вторая часть доказывается аналогично.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть доля C_0^0 больше. Если существует блок C_k, в котором идут менее $m-1$ раз подряд идет C_0^0, то существует блок, в котором идут менее $m-1$ раз подряд идет C_1^0, а значит, аналогично первым двум частям первым двум частям, если C_k не является началом или концом континуанта, существет увеличивающая замена. Рассмотрим теперь концы континуанта. Из леммы 6.2 сразу следует, что континуант должен начинаться с C_1^0 и заканчиваться на C_0^0. Пусть есть нарушение блоковой структуры в начале, то есть континуант имеет вид

$$\langle C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0, \ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t}, \ldots \rangle, \text{ где } k > 0, t > 0$$

В этом случае, очевидно, работает тот же самые прием, что и в первой части. Если же нарушение в конце, то есть

$$\langle \ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t}, \ldots, C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k} \rangle, \ k > 0, t > 0,$$

то отражение Q

$$\langle \overbrace{\ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t-1}}^{\overrightarrow{P}}, \underbrace{a, b, \ldots, a+1}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}}^{\overrightarrow{R}} \rangle, \text{ где } k > 0, \ t > 0,$$

увеличивает континуант, поскольку первое отличающееся неполное частное $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ у $[\overrightarrow{R}]$ равно $+\infty$ и имеет четный индекс. Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Нетрудно доказать, что периодический континуант, составленный из блоков $(C_1^0 \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m})$, не более, чем в 2 раза отличается от континуанта той же длины, составленного из блоков $(\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m}, C_1^0)$.

Приведем теперь индуктивное обобщение доказанной леммы. Для этого дадим индуктивное определение блоковой структуры i-го уровня.
1) Континуант имеет блоковую структуру 0-го уровня, если его последовательность неполных частных можно представить в виде последовательности блоков C_0^0 и C_1^0. Как было сказано выше, мы без ограничения общности считаем, что любой континуант из $M_3(n, s_n)$ имеет блоковую структуру 0−го уровня.
2) Если континуант имеет блоковую структуру k−го уровня, то есть представим в виде

$$\langle C_{i_1}^k, C_{i_2}^k, \ldots, C_{i_m}^k \rangle, i_l \in \{0, 1\}$$

и при этом его также можно представить в виде

$$\langle C_{j_1}^{k+1}, C_{j_2}^{k+1}, \ldots, C_{j_n}^{k+1} \rangle, j_l \in \{0, 1\}, \tag{81}$$

где

$$C_0^{k+1} = (\underbrace{C_b^k, \ldots, C_b^k}_{n}, C_s^k), \quad C_1^{k+1} = (\underbrace{C_b^k, \ldots, C_b^k}_{n+1}, C_s^k), \quad b + s = 1,$$

то такое представление назовем блоковой структурой $k+1$−го уровня. Блок C_b^k мы назовем доминирующим блоком, а парный ему блок C_s^l - доминируемым. Назовем блоковую структуру $k+1$−го уровня вырожденной, если все j_l в (81) одновременно равны между собой, и невырожденной в противном случае. Лемму 6.16 можно с помощью новых определений сформулировать в следующем, более кратком виде:
(i) *Если континуант имеет невырожденную блоковую структуру* $0-$*го уровня, то его можно при помощи увеличивающих преобразований перевести в континуант, имеющий блоковую структуру* 1*-го уровня.*
(ii) *Если в континуанте блоковая структура* 1*-го уровня вырождена, то данный континуант является максимумом по множеству* $M_3(n, S_n)$ *с точностью до некоторой, не зависящей от* n *константы.*

Итак, пусть континуант состоит из блоков k−го уровня C_0^k и C_1^k. Тогда проведем индуктивный переход к блокам $k+1$−го уровня:

Теорема 6.4 (Рекурсивный алгоритм поиска максимума).
(i) *Если континуант имеет невырожденную блоковую структуру* $k-$*го*

уровня, то его можно при помощи увеличивающих преобразований перевести в континуант, имеющий блоковую структуру $k+1$-го уровня.
(ii)*Если в континуанте блоковая структура $k+1$-го уровня вырождена, то данный континуант отличается от максимума по множеству $M_3(n, S_n)$ не более чем в 8 раз.*

Доказательству утверждения **(i)** предпошлем ряд вспомогательных лемм и следствий. Прежде всего, изучим более подробно структуру блоков $k+1-$го уровня. Обозначим $C^k_{tail} = (b, C^0_s, C^1_s, \ldots, C^{k-1}_s)$. Легко видеть, что $C^k_{tail} = (C^{k-1}_{tail}, C^{k-1}_s.)$ Назовем C^k_{tail} *хвостом k-го уровня.* Введем еще одно обозначение: пусть последовательность неполных частных X представима в виде $X = (A, B)$. Тогда в качестве $X \setminus B$ мы будем обозначать A. Если же данное представление X не имеет места, то обозначение $X \setminus B$ некорректно.

Лемма 6.17 (Лемма о существовании хвоста)**.** *Любой блок $k-$го уровня C^k_i представим в виде $(C^k_i \setminus C^k_{tail}, C^k_{tail})$, $i \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. Утверждение несложно доказывается по индукции. Для $k = 0$ оно очевидно, C^k_{tail} в этом случае равно b. Пусть утверждение верно для всех $k < l+1$, тогда, пользуясь предположением индукции, получаем:
$$C^{l+1}_0 = (\underbrace{C^l_b, \ldots, C^l_b}_{n}, C^l_s) = (\underbrace{C^l_b, \ldots, C^l_b}_{n-1}, C^l_b \setminus C^l_{tail}, \underbrace{C^l_{tail}, C^l_s}_{C^{l+1}_{tail}}). \qquad (82)$$

Аналогично для C^{l+1}_1. ☐

Лемма 6.18 (Основная лемма о хвосте)**.** $\overleftarrow{C^k_i} = (C^k_{tail}, C^k_i \setminus C^k_{tail})$.

Доказательство. Докажем по индукции. Для $k = 0$ очевидно, что

$$\overleftarrow{C^0_0} = (b, C^0_0 \setminus b), \quad \overleftarrow{C^0_1} = (b, C^0_1 \setminus b).$$

Пусть утверждение верно для всех $k \leqslant l$; рассмотрим $k = l+1$:

$$C^{l+1}_0 = (\underbrace{C^l_b, \ldots, C^l_b}_{n}, C^l_s), \quad \overleftarrow{C^{l+1}_0} = (\overleftarrow{C^l_s}, \underbrace{\overleftarrow{C^l_b}, \ldots, \overleftarrow{C^l_b}}_{n}).$$

Пользуясь предположением индукции, получаем:

$$\overleftarrow{C_0^{l+1}} = (\overbrace{C^l_{tail}, C^l_s \diagdown C^l_{tail}}^{\overleftarrow{C^l_s}}, \underbrace{\overbrace{C^l_{tail}, C^l_b \diagdown C^l_{tail}}^{\overleftarrow{C^l_b}}, \ldots, \overbrace{C^l_{tail}, C^l_b \diagdown C^l_{tail}}^{\overleftarrow{C^l_b}}}_{n}) =$$

$$= (C^l_{tail}, C^l_s, \underbrace{C^l_b, \ldots, C^l_b, C^l_b \diagdown C^l_{tail}}_{n}) = (C^{l+1}_{tail}, \underbrace{C^l_b, \ldots, C^l_b, C^l_b \diagdown C^l_{tail}}_{n}) =$$

$$= (C^{l+1}_{tail}, C^{l+1}_0 \diagdown C^{l+1}_{tail}). \quad (83)$$

Абсолютно аналогично утверждение доказывется для C^{l+1}_1. Лемма доказана. □

Выведем три простых следствия доказанной леммы.

Следствие 6.5. $\overleftarrow{C^k_i \diagdown C^k_{tail}} = C^k_i \diagdown C^k_{tail}, \quad \overleftarrow{C^k_{tail}} = C^k_{tail}$.

Доказательство. По предыдущей лемме имеем:

$$\overleftarrow{C^k_i} = (C^k_{tail}, C^k_i \diagdown C^k_{tail}).$$

С другой стороны,

$$\overleftarrow{C^k_i} = (\overleftarrow{C^k_i \diagdown C^k_{tail}, C^k_{tail}}) = (\overleftarrow{C^k_{tail}}, \overleftarrow{C^k_i \diagdown C^k_{tail}}).$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 6.19 (Обобщенная лемма о хвосте)**.**

$$(\overleftarrow{C^k_{i_1}, C^k_{i_2}, \ldots, C^k_{i_n}}) = (C^k_{tail}, C^k_{i_n}, \ldots, C^k_{i_2}, C^k_{i_1} \diagdown C^k_{tail}), \quad i_j \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(\overleftarrow{C^k_{i_1}, C^k_{i_2}, \ldots, C^k_{i_n}}) = (\overleftarrow{C^k_{i_n}}, \ldots, \overleftarrow{C^k_{i_2}}, \overleftarrow{C^k_{i_1}}).$$

Применяя лемму 6.18 к каждому из блоков $C^k_{i_j}$, получаем

$$(\overleftarrow{C^k_{i_n}}, \ldots, \overleftarrow{C^k_{i_2}}, \overleftarrow{C^k_{i_1}}) = (C^k_{tail}, C^k_{i_n} \diagdown C^k_{tail}, \ldots, C^k_{tail}, C^k_{i_2} \diagdown C^k_{tail}, C^k_{tail}, C^k_{i_1} \diagdown C^k_{tail}) =$$

$$= (C^k_{tail}, C^k_{i_n}, \ldots, C^k_{i_2}, C^k_{i_1} \diagdown C^k_{tail}). \quad (84)$$

□

Следствие 6.6.

$$\overleftarrow{(C^k_{i_1}, C^k_{i_2}, \ldots, C^k_{i_n} \searrow C^k_{tail})} = (C^k_{i_n}, \ldots, C^k_{i_2}, C^k_{i_1} \searrow C^k_{tail}), \quad i_j \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из леммы 6.19 и следствия 6.5. $\square$

Лемма 6.20. *Если в континуанте встречаются последовательности неполных частных* $(C^k_1, \underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m-k}, C^k_1)$ *и* $(\underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m+t})$ *для каких-то натуральных* k *и* t, *то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая замена отражением.*

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение континуанта:

$$\langle \overbrace{\ldots, C^k_1, \underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m-k},}^{\overrightarrow{P}} \overbrace{C^k_1, \ldots, C^k_0 \searrow C^k_{tail},}^{\overrightarrow{Q}} \overbrace{C^k_{tail}, \underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m+t-1}, \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle. \tag{85}$$

Заметим, что первое отличающееся неполное частное в цепных дробях $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ есть первое отличающееся неполное частное дробей $[C^k_1]$ и $[C^k_0]$. Действительно,

$$[\overrightarrow{R}] = [C^k_{tail}, \underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m+t-1}, \ldots].$$

С другой стороны, по лемме 6.19

$$[\overleftarrow{P}] = [C^k_{tail}, \underbrace{C^k_0, \ldots, C^k_0}_{m-k}, C^k_1, \ldots],$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим $Q = (q_1, \ldots, q_l)$, найдем такое минимальное i, что $q_i \neq q_{l+1-i}$. Для этого сравним $\overrightarrow{Q}$ и $\overleftarrow{Q}$. По следствию 6.6

$$\overleftarrow{Q} = (\overleftarrow{C^k_0 \searrow C^k_{tail}} \overleftarrow{C^k_0} \ldots),$$

что по лемме 6.19 и следствию 6.5 равно

$$(C^k_0 \searrow C^k_{tail}, C^k_{tail}, C^k_i \searrow C^k_{tail} \ldots) = (C^k_0 \ldots).$$

Таким образом, поскольку $\overrightarrow{Q} = (C^1_k \ldots)$, получаем, что искомое i есть первое отличающееся неполное частное цепных дробей $[C^k_1]$ и $[C^k_0]$. Следовательно выражения $([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])$ и $([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}])$ имеют одинаковый знак, то есть

$$([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}]) > 0.$$

Отсюда по лемме 6.3 отражение $\overrightarrow{Q}$ в формуле (85) увеличивает континуант, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Нетрудно видеть, что в результате замены континуант примет вид:

$$\begin{aligned}\langle \overbrace{\ldots, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k},}^{\overrightarrow{P}} \overbrace{C_0^k, \ldots, C_1^k \setminus C_{tail}^k,}^{\overleftarrow{Q}} \overbrace{C_{tail}^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t-1} \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle = \\ = \langle \overbrace{\ldots, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k},}^{\overrightarrow{P}} \overbrace{C_0^k, \ldots, C_1^k,}^{\overleftarrow{Q}} \overbrace{\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t-1}, \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle\end{aligned} \tag{86}$$

и будет также иметь блоковую структуру $k-$го уровня.

Следствие 6.7. *Если континуант состоит из блоков C_0^k и C_1^k т.е. имеет вид:*

$$\langle X, C_0^k, Y, C_1^k, Z \rangle, \tag{87}$$

то существует замена отражением, в результате которой континуант примет вид:

$$\langle X, C_1^k, Y', C_0^k, Z \rangle$$

и будет также иметь блоковую структуру $k-$го уровня.

Доказательство. Пусть континуант имеет вид (87) Произведем следующее отражение Q:

$$\langle X, \overbrace{C_0^k, Y, C_1^k \setminus C_{tail}^k,}^{\overrightarrow{Q}} C_{tail}^k, Z \rangle.$$

Из вышедоказанного следует, что континуант в результате отражения примет вид:

$$\langle X, \overbrace{C_1^k, Y', C_0^k \setminus C_{tail}^k,}^{\overleftarrow{Q}} C_{tail}^k, Z \rangle = \langle X, C_1^k, Y', C_0^k, Z \rangle,$$

где Y' состоит из блоков C_i^k. Что и требовалось доказать. $\square$

Докажем теперь теорему 6.4.

Доказательство. Докажем утверждение **(i)**.
Если континуант не имеет блоковой структуры $k+1-$го уровня, то это означает одну из трех возможных ситуаций:
1) В континуанте встречаются последовательности неполных частных $(C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}, C_1^k)$ и $(\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t})$ для каких-то натуральных k и t. В этом случае, как показано в лемме 6.20, существует абсолютно увеличивающая замена отражением. Это означает, что произвольный континуант $\langle A\rangle$ можно при помощи увеличивающих отражений перевести в некоторый континуант $\langle A'\rangle$, в котором не реализуется ситуация 1)
2)Континуант начинается с блока C_k^1 или заканчивается на блок C_0^k.
3)Континуант имеет вид

$$\langle\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t}, \ldots\rangle \text{ или } \langle\ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}\rangle$$

для каких-то натуральных k и t.

Разберем 2) и 3). Покажем, что в этих случаях $\langle A'\rangle$ можно при помощи отражений перевести в континуант, имеющий блоковую структуру $k+1-$го уровня. Обозначим за $len(k)$ длину (т.е. количество неполных частных) блока C_0^k. Очевидно, $len(k) \geqslant 2^{k+1}$.

2) Пусть континуант $\langle A\rangle$ начинается с блока C_1^k. Выберем в $\langle A\rangle$ произвольный блок C_0^k.

$$\langle A\rangle = \langle C_1^k, \ldots, C_0^k, \ldots\rangle.$$

Тогда по следствию 6.7 существует отражение Q

$$\langle\overbrace{C_1^k, \ldots, C_0^k \setminus C_{tail}^k}^{\overrightarrow{Q}}, C_{tail}^k, \ldots\rangle,$$

превращающее континуант в

$$\langle A'\rangle = \langle C_0^k, \ldots, C_1^k, \ldots\rangle.$$

Данное отражение может быть уменьшающим. Оценим, во сколько раз оно может уменьшить $\langle A\rangle$. Из формулы (60) следует, что:

$$\left|\frac{\langle A\rangle - \langle A'\rangle}{\langle A\rangle}\right| < |[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]|.$$

Оценим по модулю разность $[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]$. Как уже было показано, $[\overleftarrow{Q}]$ имеет вид:

$$[C_0^k \ldots] = [C_b^{k-1}, \ldots, C_b^{k-1}, C_s^{k-1} \ldots].$$

Аналогично

$$[\overrightarrow{Q}] = [C_1^k \ldots] = [C_b^{k-1}, \ldots, C_b^{k-1}, C_s^{k-1} \ldots].$$

Следовательно, первые $len(k-1)$ неполных частных цепных дробей $[\overleftarrow{Q}]$ и $[\overrightarrow{Q}]$ совпадают, а значит

$$|[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]| \leqslant \frac{1}{2^{len(k-1)}} \leqslant \frac{1}{2^{2^k}}.$$

То есть:

$$\frac{\langle A' \rangle}{\langle A \rangle} > 1 - \frac{1}{2^{2^k}}.$$

Аналогичным преобразованием отражения можно добиться, чтобы континуант заканчивался на блок C_1^k. Тогда $\langle A' \rangle$ имеет вид:

$$\langle A' \rangle = \langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{d-1}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_d}, C_1^k \rangle.$$

3) Описанными выше увеличивающими преобразованиями (85) можно добиться, чтобы все l_i кроме l_0 отличались не более чем на 1, а $l_0 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} l_i$. Если $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} l_i - l_0 \leqslant 1$, то $\langle A' \rangle$ имеет блоковую структуру $k+1-$го уровня, и индуктивный переход выполнен. В противном случае существует i такое, что $l_i - l_0 > 1$. Рассмотрим отражение Q:

$$\langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0} \overbrace{C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{i-1}} C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k \setminus C_{tail}^k}_{l_i - l_0}}^{\overrightarrow{Q}}, C_{tail}^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0} C_1^k \ldots \rangle.$$

Данное преобразование, аналогично, уменьшает континуант не более, чем в $1 + \frac{1}{2^{2^k - 1}}$ раз. В результате отражения получим континуант

$$\langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_i}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{i-1}}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0}, C_1^k, \ldots \rangle,$$

который увеличивающими преобразованиями (85) приводится к виду

$$\langle A'' \rangle = \langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_0}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_1}}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_{d-1}}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_d}}, C_1^k \rangle,$$

где $\overline{l_0} = l_i$, а все $\overline{l_j}$ отличаются друг от друга не более, чем на 1, $|\overline{l_i} - \overline{l_j}| \leqslant 1$. Таким образом, на каждом шаге уменьшающие преобразования уменьшают континуант не более, чем в $\left(1 + \frac{1}{2^{2^k-1}}\right)^3$ раз. Следовательно, в результате k шагов континуант под действием уменьшающихся преобразований уменьшится суммарно не более, чем в $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2^i-1}}\right)^3 < 8$ раз.

Докажем утверждение **(ii)**.
Применяя k раз утверждение **(i)** можно произвольный континуант $\langle A \rangle$ из $M_3(n, S_n)$ увеличивающими преобразованиями отражения перевести в континуант $\langle A'_m \rangle$, имеющий блоковую структуру $k+1-$го уровня. Поскольку данная структура по условию леммы является вырожденной, конец цепочки преобразований не зависит от выбора начального континуанта в $M_3(n, S_n)$. А значит, поскольку под действием уменьшающих преобразований континуант уменьшится суммарно не более, чем в 8 раз, по лемме 6.1 $\langle A'_m \rangle$ отличается от максимума по множеству $M_3(n, S_n)$ не более, чем в 8 раз.

Таким образом, теорема доказана полностью. □

Следствие 6.8. *Если* $\langle A_m \rangle = \max(M_3(n, S_n))$, *то*
(i) *Существует такое натуральное* k, *что* $\langle A_m \rangle$ *не более, чем в* 8 *раз отличается от некоторого алгоритмически построимого континуанта* $\langle A'_m \rangle$ *из* $M_3(n, S_n)$, *имеющего вырожденную блоковую структуру* $k-$*го уровня.*
(ii) $\langle \underbrace{A'_m, A'_m, \ldots, A'_m}_{l} \rangle$ *не более, чем в* 8 *раз отличается от* $\max(M_3(ln, lS_n))$

Доказательство.
(i) Применим к $\langle A_m \rangle$ рекурсивный алгоритм поиска максимума. В результате данного алгоритма он перейдет в $\langle A'_m \rangle$ под действием некоторой цепочки отражений. Как следует из теоремы 6.4 $\langle A'_m \rangle$ не более, чем в 8 раз отличается от $\langle A_m \rangle$, что и требовалось доказать.
(ii) Поскольку $\langle A'_m \rangle$ имеет вырожденную блоковую структуру $k-$го уровня для некоторого натурального k, то $\langle \underbrace{A'_m, A'_m, \ldots, A'_m}_{l} \rangle$ также имеет вырожденную блоковую структуру $k-$го уровня. Для завершеия доказательства следствия остается только воспользоваться утверждением **(ii)** теоремы 6.4. □

Таким образом, задача на поиск асимптотики максимума решена, предъявлен алгоритм, позволяющий прийти к нему за конечное число шагов. Назовем результат работы алгоритма *асимптотическим максимумом* по множеству $M(n, S_n)$ и обозначим его $\max_a(n, S_n)$. Из теорем

6.1, 6.3 и 6.4 следует, что существует некоторая не зависящая от n и S_n константа c_0, что выполнено неравенство:

$$1 \leqslant \frac{\max(n, S_n)}{\max_a(n, S_n)} < c_0.$$

Докажем лемму об асимптотике периодического континуанта.

Лемма 6.21.

$$\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle \sim c(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda)^n, \tag{88}$$

где $\lambda = [\overline{A}]$*— квадратичная иррациональность, а* c *- некоторая, зависящая от* A*, но не зависящая от* n *константа.*

Доказательство. Пользуясь правилом раскрытия континуантов (14), получаем:

$$\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle = \langle A\rangle\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}\rangle + \langle A^-\rangle\langle A_-\underbrace{A, \ldots, A}_{n-2}\rangle = \langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}\rangle(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}]).$$

Следовательно:

$$\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle = \langle A\rangle\prod_{i=2}^{n}(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]).$$

Докажем, что отношение этого выражения к $(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda)^n$ стремится к константе. Рассмотрим отношение

$$\prod_{i=2}^{\infty}\frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]} = \prod_{i=2}^{\infty}\frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle([\overbrace{A, \ldots, A}^{i-1}] - r_n)}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]},$$

где $r_n = [\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}] - \lambda$.

Поскольку $|r_n| < \frac{1}{2^n}$, получаем:

$$\prod_{i=2}^{\infty}\frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle([\overbrace{A, \ldots, A}^{i-1}] - r_n)}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]} = \prod_{i=2}^{\infty}(1 - \frac{\langle A^-\rangle r_n}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]}).$$

По известному свойству это бесконечное произведение сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходится ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} r_n \frac{\langle A^- \rangle}{\langle A \rangle + \langle A^- \rangle [\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]},$$

что выполнено, поскольку выражение

$$\frac{\langle A^- \rangle}{\langle A \rangle + \langle A^- \rangle [\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]}$$

ограниченно положительными константами. А следовательно, бесконечное произведение имеет предел, лемма доказана. $\square$

7 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Пользуясь леммой 5.3, получаем

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)-5}} \geqslant \frac{\varphi^{2t-1}}{\varphi^{\frac{t\varkappa_{inf}(x)}{2}}},$$

что стремится к $+\infty$ при $\varkappa_{inf}(x) < 4$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части выберем следующие параметры:

$$\frac{1}{2} < \alpha \in \mathbb{Q} < 1, \quad 0 < \varepsilon < \alpha - \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{N}: \ 3m \leqslant \varphi^{m\varepsilon} \text{ и при этом } m\alpha \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим теперь квадратичную иррациональность $x = [\overline{\underbrace{1, \ldots, 1}_{2m-1}, \alpha m + 1}]$.

Для нее

$$\varkappa_{inf}(x) = 1 + 2\frac{m - 1 + \alpha m + 1}{m} = 3 + 2\alpha.$$

Поскольку все неполные частные x ограничены, то из леммы 5.2 следет, что для некоторого $t = 2Nm$ выполнено

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant C\frac{q_t^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{t-1}+2a_t}}, \tag{89}$$

Оценим сверху q_t. Поскольку

$$\langle A, B \rangle \leq 2\langle A \rangle \langle B \rangle \text{ и } \langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{2m-1} \rangle < \varphi^{2m-1},$$

получаем:

$$q_t = \langle \overbrace{\underbrace{1,\dots,1}_{2m-1}, \alpha m, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{2m-1}, \alpha m}^{N \text{ повторений}} \rangle \leqslant 2^N \langle \underbrace{1,\dots,1}_{2m-1}, \alpha m\rangle^N \leqslant$$

$$\leqslant (4\alpha m)^N \varphi^{2mN-N} \leqslant \left(3\alpha m \varphi^{2m}\right)^N \leqslant \varphi^{(m(2+\varepsilon)^N)} = \varphi^{mN(2+\varepsilon)}. \quad (90)$$

Таким образом, объединяя оценки (89) и (90), имеем:

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant C \frac{\varphi^{mN(4+2\varepsilon)}}{\varphi^{mN(3+2\alpha)}} = C\varphi^{mN(1+2\varepsilon-2\alpha)},$$

что стремится к 0 при $N \to \infty$.
Таким образом, в силу того, что α можно выбрать сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$, второе утверждение теоремы доказано. □

Доказательство теоремы 2.

Доказательство. В доказательстве данного утверждения мы докажем существование $\varkappa_2$ и предъявим алгоритм, позволяющий получить его с любой точностью, а также оценим сверху скорость его сходимости.

Во-первых отметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{7,4}]) = 0$. Действительно, по лемме 6.21

$$q_{2t} = \langle 4, 7, \dots, 4, 7\rangle \asymp (29 + 4[\overline{7,4}])^t < 30^t.$$

А поскольку

$$\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{2t-1}+2a_{2t}} = \varphi^{15t} > 1000^t,$$

получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{2t-1}+2a_{2t}}} = 0.$$

Следовательно, по лемме 5.3 производная в точке $[\overline{7,4}]$ существует и равна 0.
Далее, пусть $x = [a_1, \dots, a_t, \dots]$ - иррациональное число и $\varkappa_{inf}(x) > 15$. Тогда по лемме 5.3

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)-5}} \quad (91)$$

Напомним, что $\max(M^{\varphi}(t, S_t))$ - максимум по всем континуантам длины t с $S_t^{\varphi}(x) = S_t$. Очевидно, что

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)-5}} \leqslant C\frac{\max^2(M^{\varphi}(t,S_t))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)}} < C_1 \frac{\max_a^2(M^{\varphi}(t,S_t))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)}}.$$

Поскольку по теореме 6.3 $\langle A_{max}\rangle = \max_a(M^\varphi(t,S_t)) \in M_3(t,S_t)$, а $\varkappa_{inf}(x) > 15$, то по следствию 6.4 любое неполное частное $\langle A_{max}\rangle$ больше либо равно любого соответствующего неполного частного континуанта $\langle B\rangle = \langle\underbrace{7,4,\ldots,7,4}_{\text{t/2 пар}}\rangle$. Отсюда следует, что $\langle B\rangle$ можно превратить в $\langle A\rangle$ увеличением некоторых неполных частных на 1 (возможно несколько раз). Однако несложно убедиться, что любая такая замена уменьшает дробь в правой части формулы (91). Следовательно $\varkappa_2$ существует и меньше 15.

Аналогично несложно показать, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{7,3}]) = +\infty$, а значит, $\varkappa_2 > 13$ Тогда из теоремы 6.3 следует, что $\max_a(M^\varphi(t,S_t))$ для всех x, для которых выполнено

$$13 < \frac{S_t^\varphi(x)}{t} < 15$$

достигается на множестве состоящем из континуантов $\langle A\rangle$ таких, что $N(A) = (\{7\},\{3,4\})$. Обозачим это множество $C^7_{3,4}$. Сформулируем следующий простой принцип:
Пусть $x = [\overline{A}], y = [\overline{B}]$ - периодические цепные дроби, $A,B \in C^7_{3,4}$, $l(A) = t_1, l(B) = t_2$, причем:

$$\langle A\rangle = \max_a(M^\varphi(t_1, S^\varphi_{t_1}(A))),\ \langle B\rangle = \max_a(M^\varphi(t_2, S^\varphi_{t_2}(B))) \tag{92}$$

И пусть $g'_{\varphi^{-1}}(x) = \infty,\ g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$. Тогда

$$\varkappa_{inf}(x) \leqslant \varkappa_2 \leqslant \varkappa_{inf}(y).$$

Действительно, пусть $\varkappa_2 < \varkappa_{inf}(x)$. Это противоречит определению $\varkappa_2$, поскольку $\varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2$, но $g'_{\varphi^{-1}}(x) = \infty$.

Если же $\varkappa_2 > \varkappa_{inf}(y)$, то это означает, что $\exists z : \varkappa_{inf}(y) < \varkappa_{inf}(z) < \varkappa_2$ и при этом $g'_{\varphi^{-1}}(z) = \infty$. Пусть $z = [c_1 \ldots c_t \ldots]$, тогда

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(z+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(z)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2(z)}{\varphi^{S_t^\varphi(z)-5}} \leqslant \frac{\max^2(M^\varphi(t,\ S_t^\varphi(z)))}{\varphi^{S_t^\varphi(z)-5}}.$$

Лемма 7.1. *Функция*

$$f(S_t^\varphi(z)) = \frac{{\max_a}^2(M^\varphi(t,\ S_t^\varphi(z)))}{\varphi^{S_t^\varphi(z)}} \tag{93}$$

при достаточно большом t убывает с ростом $S_t^\varphi(z)$ при $13 < \frac{S_t^\varphi(z)}{t} < 15$.

Доказательство. Действительно, если

$S_t^\varphi(z_1) > S_t^\varphi(z_2)$ и $\langle A_1\rangle = \max_a(M^\varphi(t,\ S_t^\varphi(z_1))), \langle A_2\rangle = \max_a(M^\varphi(t,\ S_t^\varphi(z_2)))$,

то по теореме 6.3 $A_1, A_2 \in C_{3,4}^7$. Докажем неравенство

$$\frac{\langle A_2\rangle}{\langle A_1\rangle} < c_0\left(\frac{4}{3}\right)^{(S_t^\varphi(z_2)-S_t^\varphi(z_1))/2}. \tag{94}$$

Возьмем любые $\frac{S_t^\varphi(z_2)-S_t^\varphi(z_1)}{2}$ неполных частных $\langle A_2\rangle$, равных 4 и заменим их на 3. Так как каждая такая замена уменьшает континуант не более, чем в $\frac{4}{3}$ раза, имеем оценку

$$\frac{\langle A_2\rangle}{\langle A_2'\rangle} < \left(\frac{4}{3}\right)^{(S_t^\varphi(z_2)-S_t^\varphi(z_1))/2}.$$

А поскольку $S_t^\varphi(A_2') = S_t^\varphi(A_1)$, то $\langle A_2'\rangle < c_0\max_a(M^\varphi(t,\ S_t^\varphi(z_1))) = c_0\langle A_1\rangle$, что доказывает неравенство (94).
Далее,

$$\frac{\varphi^{(S_t^\varphi(z_2))}}{\varphi^{(S_t^\varphi(z_1))}} = \varphi^{(S_t^\varphi(z_2)-S_t^\varphi(z_1))} > \left(\frac{3}{2}\right)^{(S_t^\varphi(z_2)-S_t^\varphi(z_1))}, \tag{95}$$

откуда, подставляя (94) и (95) в (93), получаем убывание функции $f(S_t^\varphi(z))$ при достаточно большом t. $\square$

Таким образом,

$$\frac{\max_a^2(M(t, S_t^\varphi(z)))}{\varphi^{S_t^\varphi(z)}} \leqslant \frac{\max_a^2(t, S_t^\varphi(y)}{\varphi^{S_t^\varphi(y)}} \leqslant C_1\frac{q_t^2(y))}{\varphi^{S_t^\varphi(y)}},$$

где последнее неравенство выполнено по лемме 6.16. А из того, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{q_t^2(y))}{\varphi^{S_t^\varphi(y)}} = 0,$$

мы получаем противоречие с тем, что $g'_{\varphi^{-1}}(z) = +\infty$.

Доказанный принцип позволяет найти $\varkappa_2$ с любой точностью. Вычисления показывают, что для

$$x = [\underbrace{7, 3, \ldots, 7, 3}_{37\text{ пар}} 7, 4] \qquad g'_{\varphi^{-1}}(x) = 0,$$

а для

$$y = [\underbrace{7, 3, \ldots, 7, 3}_{38\text{ пар}} 7, 4] \qquad g'_{\varphi^{-1}}(y) = \infty.$$

Следовательно
$$13.0513 \asymp 13\frac{2}{39} < \varkappa_2 < 13\frac{2}{38} \asymp 13.0526.$$
Проводя итерации алгоритма с блоками все более высокого уровня можно сосчитать $\varkappa_2$ с любой требуемой точностью. Оценим скорость сходимости алгоритма.

Прежде всего рассмотрим для введенных в (92) континуантов $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ континуанты $\langle A'\rangle \in M_3(t_1, S^{\varphi}_{t_1}(A))$ и $\langle B'\rangle \in M_3(t_2, S^{\varphi}_{t_2}(B))$, являющиеся асимптотическими максимумами по соответствующим множествам. Ввиду теоремы 6.4 они имеют вырожденную блоковую структуру. Напомним, что t_1 и t_2 - это длины $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ соответственно. В силу теоремы 6.4 и следствия 6.8 для любого натурального i выполнены оценки
$$1 \leqslant \frac{\langle\overbrace{A,\ldots,A}^{i}\rangle}{\langle\underbrace{A',\ldots,A'}_{i}\rangle} < 8, \quad 1 \leqslant \frac{\langle\overbrace{B,\ldots,B}^{i}\rangle}{\langle\underbrace{B',\ldots,B'}_{i}\rangle} < 8.$$
Следовательно,
$$g'_{\varphi^{-1}}([\overline{A}]) = g'_{\varphi^{-1}}([\overline{A'}]) = \infty, \quad g'_{\varphi^{-1}}([\overline{B}]) = g'_{\varphi^{-1}}([\overline{B'}]) = 0.$$
Без ограничения общности будем считать, что $t_1 = t_2$, поскольку в противном случае мы можем перейти к рассмотрению цепных дробей
$$[\underbrace{\overline{A',\ldots,A'}}_{t_2}] = [\overline{A'}] \quad \text{и} \quad [\underbrace{\overline{B',\ldots,B'}}_{t_1}] = [\overline{B'}],$$
имеющих одинаковую длину. Рассмотрим континуант $\langle A', B'\rangle$, обозначим его $\langle C'\rangle$. Очевидно, что $l(C') = 2t_1$, а $S^{\varphi}_{2t_1}(C') = S^{\varphi}_{t_1}(A') + S^{\varphi}_{t_1}(B')$. Это означает, что
$$\varkappa_{inf}([\overline{C'}]) = \frac{\varkappa_{inf}([\overline{A'}]) + \varkappa_{inf}([\overline{B'}])}{2}.$$
Обозначим $\langle C\rangle = \max(M_3(2t_1, S^{\varphi}_{2t_1}(C')))$. Найдем, чему равна производная в точке $[\overline{C}]$. Если она равна 0, то по сформулированному выше принципу максимума
$$\varkappa_{inf}([\overline{A'}]) < \varkappa_2 < \varkappa_{inf}([\overline{C'}]).$$
Если, напротив, $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{C'}]) = \infty$, то, аналогично,
$$\varkappa_{inf}([\overline{C'}]) < \varkappa_2 < \varkappa_{inf}([\overline{B'}]).$$
Таким образом, за один шаг алгоритма отрезок, на котором лежит $\varkappa_2$ уменьшается в 2 раза. Следовательно, для того, чтобы найти $\varkappa_2$ с точностью ε требуется не более $\log\varepsilon^{-1}$ шагов алгоритма. $\square$

Доказательство теоремы 3.

Доказательство. Заметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{1,2}]) = +\infty$, поскольку по лемме 6.21
$$q_{2t}^2 = (3 + (\sqrt{3} - 1))^{2t} > 13^t$$
и знаменатель дроби из формулы (15) равен $\varphi^{S_{2t}^{\varphi}(x)} = \varphi^{5t} < 12^t$, а значит, по данной лемме производная существет и равна $+\infty$.

Пусть теперь x-произвольное число с неполными частными, ограниченными 2. Рассматривая также для него дробь
$$\frac{q_{2t}^2(x)}{\varphi^{S_{2t}^{\varphi}(x)}}, \tag{96}$$
заметим, что континуант $q_{2t}(x)$ получен из континуанта
$$\underbrace{\langle 1, 2, \ldots, 1, 2 \rangle}_{\text{t пар}}$$
заменой некоторых единиц на двойки для нечетных неполных частных и заменой двоек на единицы для четных неполных частных. Нетрудно видеть, что обе замены увеличивают дробь (96). Действительно, замена 1 на 2 по формуле (75) увеличивает континуант не менее, чем в $\frac{4}{3}$ раза, а значит числитель увеличится как минимум, в $\frac{16}{9}$ раза в то время, как знаменатель увеличится в φ раз, следовательно дробь (96) возрастет. Аналогично, поскольку все цепные дроби с неполными частными из нашего континуанта меньше $\frac{1}{3}$, замена 2 на 1 уменьшит континуант не более, чем в
$$\frac{2 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{8}{5} < \varphi$$
раз, а следовательно дробь (96) также увеличится.

Для доказательства последней части утверждения заметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{1,3}]) = 0$, что проверяется аналогично. Теорема доказана полностью. □

Доказательство теоремы 4.

Доказательство. Докажем, что если $x = [\overline{\overrightarrow{A}}]$ - периодическая цепная дробь, причем длина A четная, а $y = [\overline{\overleftarrow{A}}]$, то $g'_{\varphi^{-1}}(x) = g'_{\tau}(y)$. Действительно, поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено
$$\langle \underbrace{\overrightarrow{A}, \ldots, \overrightarrow{A}}_{m} \rangle = \langle \underbrace{\overleftarrow{A}, \ldots, \overleftarrow{A}}_{m} \rangle$$

то для любого натурального t $q_t(x) \asymp q_t(y)$. Аналогично, поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$S^{\varphi}(\underbrace{\overrightarrow{A}, \ldots, \overrightarrow{A}}_{m}) = S^{\tau}(\underbrace{\overleftarrow{A}, \ldots, \overleftarrow{A}}_{m})$$

то для любого натурального t $S_t^{\varphi}(x) \asymp S_t^{\varphi}(y)$. Теперь наше утверждение автоматически следует из лемм части 4.

Отсюда следует, что константы в теоремах 1, 2 и 3 для $g_\tau(x)$ те же самые и утверждения теорем 1, 2 и 3 для них доказываются аналогично.

$\square$

Список литературы

[1] Minkowski H. Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. — Berlin, 1904.

[2] Salem R. On some singular monotone functions which are strictly increasing. // Trans. Amer. Math. So., 53 (1943), 427 - 439.

[3] Anna A. Dushistova, Igor D. Kan, Nikolai G. Moshchevitin. Differentiability of the Minkowski question mark function. http://arxiv.org/abs/0903.5537.

[4] Denjoy A. Sur une fonction r?elle de Minkowski. — Journal de Math?matiques Pures et Appliqu?es. — 1938. — 17. — pp. 105—151.

[5] R. F. Tichy, J. Uitz. An extension of Minkowski's singular function. — Appl. Math. Lett., 8 (1995), 39-46.

[6] E.N. Zhabitskaya. On arithmetical nature of Tichy-Uitz's function. http://arxiv.org/abs/0909.1273.

[7] Paradis J., Viader P., Bibiloni L. The derivative of Minkowski's ?(x) function. // J. Math. Anal. and Appl. 253 (2001), 107 - 125.

[8] Anna A. Dushistova, Nikolai G. Moshchevitin, On the derivative of the Minkowski question mark function ?(x). // Preprint, available at arXiv: 0706.2219v2 [math.NT] 17Dec2007.

[9] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. Concrete Mathematics. Addison-Wesley, 1994.

[10] Хинчин Александр Яковлевич. Цепные дроби. М.: Едиториал УРСС, 2004. ISBN 5-354-00551-5.

[11] Motzkin T.S., Straus E.G. Some combinatorial extremum problems. // Proc. Amer. Math. Soc. (1956), 7, 1014 - 1021.

[12] И. Д. Кан. Уточнение правила сравнения континуантов, Дискрет. матем. 12:3 (2000), 72–75.